不動産投資リターンのNon-i. i. d. 過程に関する時系列的解明

Time Series Examination on Non-i. i. d. Process of Real Estate Returns

鈴木 英晃　高辻 秀興
Hideaki Suzuki　Hideoki Takatsuji

Abstract *This research examines non-i. i. d. process of real estate investment returns that Cheng et at (2013) in their analysis rather from time-series analysis point of view. While Cheng et al allows the process to play a major role in determining allocation of the asset class within a multi-asset portfolio, this research casts some discussion points in their argument and recommendation for further analysis.*

キーワード：不動産、時系列分析、Non-i. i. d. 過程、ポートフォリオ選択
学際領域：計量経済

1.　研究の目的

不動産は投資資産としての側面を持つ一方、株式や債券とはいささか異なる扱いを受けている。これは不動産がそれら資産と比較して低い流動性を持つことが一つの要因である。同非流動性は一般に、長い市場滞留時間や取引費用などを指すことが多く、これら不動産特有の性質を分析した既存研究も多くある。しかし不動産の非流動性がその他の資産と比較した場合の相対的な魅力に与える影響について、つまりポートフォリオ選択における不動産の非流動性を分析した研究は、実は未だに発展途上にある。そのような中でも Cheng *et al.*（2013）は同特性を反映したポートフォリオ選択モデルの構築を行った点において先駆的である。彼らは非流動性を一定の負荷とみなし、平均分散ポートフォリオ内で不動産への最適資産配分比を解いた。

しかし Cheng *et al.* のモデルには疑問が残る部分もある。彼らは不動産リターンには Non-i. i. d. 過程があると主張している。これはつまり、不動産の投資分散が長期保有と供に増幅され長期保有を妨げる傾向があるとの主張であり、この主張をもって彼らのモデル内で支配的な役割を与えている。これは本当だろうか。そもそも、この Non-i. i. d. 過程とは何を表すものであろうか。より詳しい整理が必要である。さらに、同特性が、日本の市場においても観測できるのか。観測できれば考慮する必要性があるが、なければ日本においては特に考慮する必要はないともいえ

る。そこで本研究では、Cheng *et al.* が指摘する Non-i. i. d. 過程を整理し、そして日本の市場において確認していく。

2. Cheng *et al* の指摘する Non-i. i. d. 過程

長期ポートフォリオ選択において、将来のリターンの期待値とそのリスク（標準偏差）を予測することは基礎的な作業である。今日では一般的となった所定の時系列分析を通じて予測のための時系列モデルを系統的に構築することは、そのためのポピュラーな方法の 1 つであろう。しかし様々な資産にはそれぞれ固有の時系列的な特性があるはずであり、それに応じて分析のアプローチも若干異なってくることが予想される。ここではまず、不動産のリターンをめぐる先行研究のうち Cheng, Lin, and Liu（2007, 2008, 2010, 2012, 2013, 以下 Cheng らと呼ぶ）が指摘した non-i. i. d. 過程の問題に焦点を当てていこう。

2.1 Non-i. i. d. 過程が問題となるとき

さて、そもそも Cheng らがよぶ不動産の Non-i. i. d 過程とはなにか。「不動産を h 期間保有するときのリターンの分散は、1 期間保有するときのリターンの分散の h 倍ではなく h^2 倍に近い」というのが、Cheng らが指摘した Non-i. i. d. 過程の問題である。これが問題となるのは、長期ポートフォリオ選択に平均分散モデルを適用する際である。一般の金融資産を将来 h 期間保有するときのリターンの分散は 1 期間保有するときのリターンの分散の h 倍であるのに対し、不動産を h 期間保有するときのリターンの分散は 1 期間保有するときのリターンの分散の h 倍ではなく h^2 倍に近い。よって長期の平均分散モデルは 1 期間のものと定式化が異なるという点にある。

定式化して説明するとこうである。金融資産を h 期間保有するときのリスク調整済みリターン $r_{adj,L}$ は、1 期間当りのリターンの期待値 m_L と分散 $\sigma_L{}^2$ を用いて次式のように表すことができる。なお λ はリスク回避度である。

$$r_{adj,L}=hm_L-\lambda h\sigma_L{}^2 \tag{2.1}$$

これに対し、不動産を h 期間保有するときのリスク調整済みリターン $r_{adj,R}$ の場合は、1 期間当りのリターンの期待値 m_R と分散 $\sigma_R{}^2$ を用いて次式のようになるという。

$$r_{adj,R}=hm_R-\lambda h^2\sigma_R{}^2 \tag{2.2}$$

つまり h 期間保有のリスクは $\sigma_R{}^2$ の h^2 倍であり、金融資産より速い速度で収益（価格）リスクが増大するという。こうした定式化を使って Cheng らは、従来の調査・研究が単純な 1 期間平均分散モデルを使って示したほどには、長期ポートフォ

リオにおける現実の不動産の保有率は高くないという現象をうまく説明した。このように、長期ポートフォリオ選択で用いられる平均分散モデルの長期リターンのリスクの定式化に直接かかわってくるという点で、彼らの指摘した Non-i. i. d. 過程が無視できない知見となっているのである。

2.2　Non-i. i. d. 過程と分散

Cheng らは Non-i. i. d. 過程を明示的にモデル化していないが、一連の文献からするとその論旨は次のようなことだと考えられる。なお、後のわれわれの追試験と整合的に扱うため、資産のリターンとはすべて対数リターンであるとする。今ある資産の t 期の価格（われわれのデータでは総合収益指数）を X_t とする。これを t 期から $t+1$ 期まで 1 期間保有するときのリターン $r_{t+1}(1)$ は

$$r_{t+1}(1)=\log\left(\frac{X_{t+1}}{X_t}\right)=\log X_{t+h}-\log X_t \qquad (2.\,3)$$

である。リターンの添字はリターンが実現する期を示すものとする。またかっこ内は保有期間である。さらに t 期から $t+h$ 期まで h 期間保有するときのリターンを $r_{t+h}(h)$ とすると

$$\begin{aligned} r_{t+h}(h)&=\log\left(\frac{X_{t+h}}{X_t}\right)=\log\left(\frac{X_{t+1}}{X_t}\cdot\frac{X_{t+2}}{X_{t+1}}\cdots\frac{X_{t+h}}{X_{t+h-1}}\right) \qquad (2.\,4)\\ &=r_{t+1}(1)+r_{t+2}(1)+\cdots+r_{t+h}(1)\\ &=r_{t+1}+r_{t+2}+\cdots+r_{t+h} \end{aligned}$$

である。なお誤解がない限り保有期間が 1 のときリターンの (1) の表記を省略する。

ここで、t 期のリターン r_t は、1 期当たりのリターンの期待値 m と確率攪乱項との和で表されるとする。これは Cheng らの一連の研究が行った分析作業から推察されるモデルである。

$$r_t=m+\varepsilon_t \qquad (2.\,5)$$

これを用いると、(2. 4) 式の $r_{t+h}(h)$ は

$$r_{t+h}(h)=hm+(\varepsilon_{t+1}+\varepsilon_{t+2}+\cdots+\varepsilon_{t+h}) \qquad (2.\,6)$$

となる。

さてまず、「リターンが i. i. d. 過程に従う」とは (2. 5) 式において

$$\varepsilon_t \sim \text{i. i. d}\,(0,\sigma^2) \qquad (2.\,7)$$

であることである。このとき一般に i. i. d $(0, \sigma^2)$ に従う h 個の確率変数 $\varepsilon_{t+1}, \varepsilon_{t+2}, \cdots, \varepsilon_{t+h}$ の線形和

$$s=\phi_1\varepsilon_{t+1}+\phi_2\varepsilon_{t+2}+\cdots+\phi_h\varepsilon_{t+h} \quad (\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_h \text{ は定数}) \tag{2. 8}$$

を考えたとき、その期待値と分散は

$$E[s]=0 \tag{2. 9}$$

$$Var(s)=\phi_1{}^2\sigma^2+\phi_2{}^2\sigma^2+\cdots+\phi_h{}^2\sigma^2 \tag{2. 10}$$

である。（2. 6）式にこれを用いると

$$Var(r_{t+h}(h))=Var(\varepsilon_{t+1}+\varepsilon_{t+2}+\cdots+\varepsilon_{t+h})=1^2\sigma^2+1^2\sigma^2+\cdots+1^2\sigma^2=h\sigma^2 \tag{2. 11}$$

となる。すなわち、「ある資産の 1 期間のリターンが i. i. d $(0, \sigma^2)$ に従うならば、この資産を h 期間保有するときのリターンの分散は $h\sigma^2$ となる」ことが言える。

一方その対偶として、「h 期間保有するときのリターンの分散が $h\sigma^2$ でないならば、

$$\varepsilon_t \sim \text{ non-i. i. d.} \tag{2. 12}$$

である」ということになる。Cheng らは様々な資産の価格指数のデータをもとに計測した結果、一般の金融資産については h 期間保有するときのリターンの分散はほぼ $h\sigma^2$ であるが、不動産についてはこれに従わないことを見出した。彼らの計測によれば不動産の場合の h 期間保有の分散はほぼ $h^2\sigma^2$ である。なぜ h^2 となるかは、なんらかのモデルから理論的に導かれたものではなく、彼らの統計的な計測の結果によるファクトファインディングである。これをもって彼らは不動産のリターンは Non-i. i. d. 過程だとしているのである。

2.3　Non-i. i. d. 過程の計測

Cheng らと同じ分析を行って、われわれのデータでも同様な観測結果が得られるか追試験してみることにしよう。分析の方法について Cheng らが明示的に定式化したものがあるわけではないが、Cheng *et al.*(2008), pp. 6-7の記述にしたがって作業の内容を再現することができる。

今ある資産の T 期間にわたる総合収益指数のデータ $X_1, X_2, \cdots, X_T$ があるとする。以下総合収益指数に基づくリターンはすべて対数リターンで表現するとする。これを用いて次のようにして保有期間ごとのリターンのデータ系列を作ることができる。

① 1期間保有したときのデータ系列：$(T-1)$ 件

$$\log\left(\frac{X_2}{X_1}\right), \log\left(\frac{X_3}{X_2}\right), \cdots, \log\left(\frac{X_{t+1}}{X_t}\right), \cdots, \log\left(\frac{X_T}{X_{T-1}}\right) \tag{2. 13}$$

$$\rightarrow r_2, r_3, \cdots, r_{t+1}, \cdots, r_T$$

② 2期間保有したときのデータ系列：$(T-2)$ 件

$$\log\left(\frac{X_3}{X_1}\right), \log\left(\frac{X_4}{X_2}\right), \cdots, \log\left(\frac{X_{t+2}}{X_t}\right), \cdots, \log\left(\frac{X_T}{X_{T-2}}\right) \tag{2. 14}$$

$$\rightarrow r_3(2), r_4(2), \cdots, r_{t+2}(2), \cdots, r_T(2)$$

③ h 期間保有したときのデータ系列：$(T-h)$ 件

$$\log\left(\frac{X_{1+h}}{X_1}\right), \log\left(\frac{X_{2+h}}{X_2}\right), \cdots, \log\left(\frac{X_{t+h}}{X_t}\right), \cdots, \log\left(\frac{X_T}{X_{T-h}}\right) \tag{2. 15}$$

$$\rightarrow r_{1+h}(h), r_{2+h}(h), \cdots, r_{t+h}(h), \cdots, r_T(h)$$

これらのデータ系列を用いて次のようにリターンの記述統計が得られる。

④ h 期間保有したときのリターンの平均

$$m(h) = \frac{1}{T-h}\sum_{t=1}^{T-h}(\log X_{t+h} - \log X_t) \tag{2. 16}$$

⑤ h 期間保有したときの1期間当り換算リターン

$$\overline{m}(h) = \frac{m(h)}{h} \tag{2. 17}$$

⑥ h 期間保有したときのリターンの分散

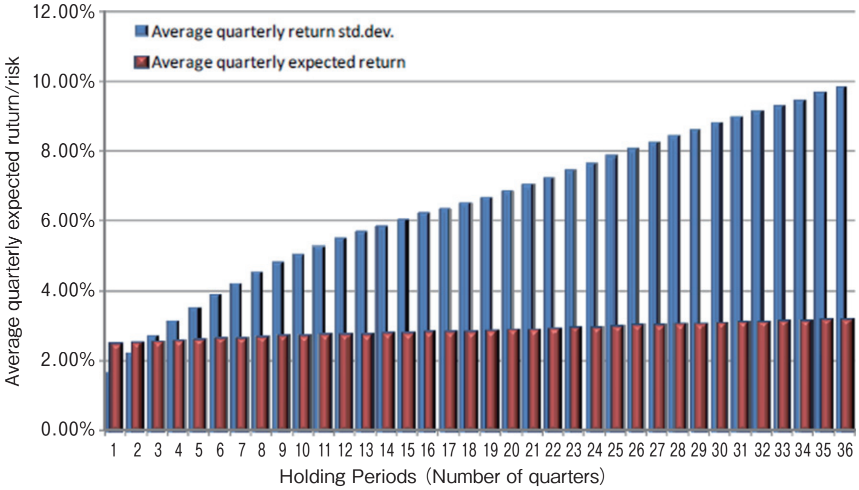
$$\sigma(h)^2 = \frac{1}{T-h}\sum_{t=1}^{T-h}\left(\log X_{t+h} - \log X_t - m(h)\right)^2 \tag{2. 18}$$

⑦ h 期間保有したときのリターンの標準偏差を基準化した指数
（1期間保有の標準偏差で除してスケール調整したもの）

$$\overline{\sigma}(h) = \frac{\sigma(h)}{\sigma(1)} \tag{2. 19}$$

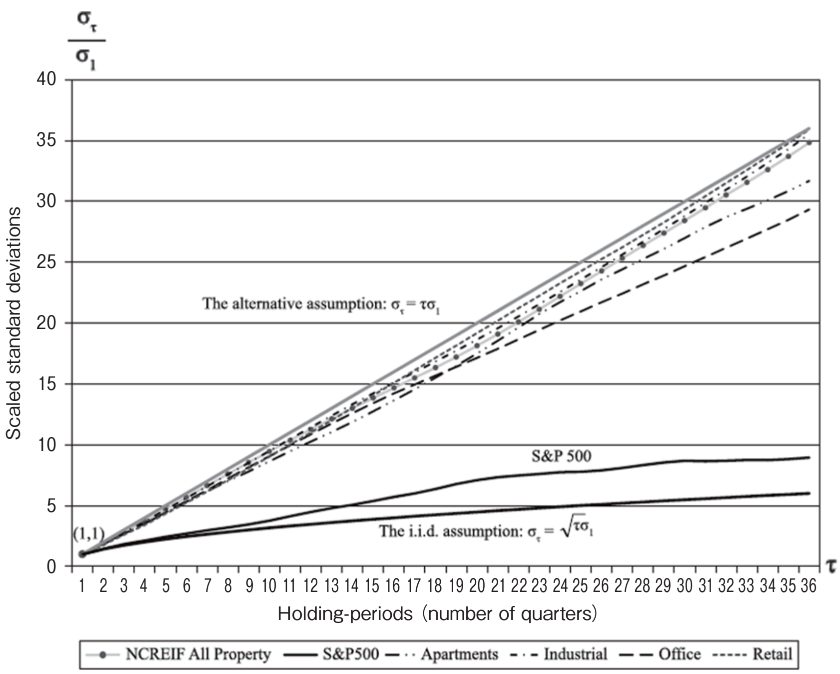
Cheng *et al.*（2010）はこれらを計算し、不動産を h 期間保有したときのリターンの平均と標準偏差について次のように述べている。第1に、1期間当り換算リターン $\overline{m}(h)$ は、保有期間が変化してもほぼ1期間保有のときのリターン m と同

図2.1　Different Investment Horizons Imply Different Average Return and Risk: $\overline{m}(h)$, $\sigma(h)$



出典：Cheng *et al.*（2010）

図2.2　The Risk Curves of NCREIF Indexes（1978Q1-2008Q4）：$\overline{\sigma}(h)$



出典：Cheng *et al.*（2013）

じである（図2.1）。これは、(2.16)、(2.17)、(2.6）式により

$$\overline{m}(h)=\frac{m(h)}{h}=\frac{1}{h}E\left[r_{t+h}(h)\right]=m \tag{2.20}$$

となることと整合している。よって、逆に長期の平均分散モデルで h 期間保有したときのリターンの期待値を定式化するには、1 期間保有のときのリターン m を h 倍した hm を適用すればよい。ところがそれに対し、第 2 に、h 期間保有の標準偏差 $\sigma(h)$（2. 8式）は、保有期間が長くなるに従い線形的に増大する（図2. 1）。これは、リターンが i. i. d. 特性に従う（$\varepsilon_t \sim$ i. i. d $(0, \sigma^2)$）ならば、(2. 8)、(2. 11) 式により

$$\sigma(h)=\sqrt{Var\left(r_{t+h}(h)\right)}=\sqrt{h}\,\sigma \tag{2. 21}$$

となることと整合しない。むしろ $\sigma(h)=h\sigma$ のように読み取れる。よって長期の平均分散モデルで h 期間保有したときのリターンの分散を定式化するには、従来 $h\sigma^2$ とすればよいと考えられてきたが、そうではなく $h^2\sigma^2$ とすべきである。それは、不動産のリターンが Non-i. i. d. 過程を有するからである。

3.　日本データでの検証

それではここで Cheng らの指摘する Non-i. i. d. 過程が日本でも確認できるのかを試験してみよう。

3.1　研究データ

われわれが用いたデータは次のとおりである。株式指数には東京証券取引所の発行する「配当込 TOPIX」を用いる。さらに詳細にわけて分析を行う場合、「配当込 TOPIX500」と「配当込 TOPIX small」を用いる。JREIT（日本不動産投資信託）には三井住友トラスト基礎研究所の「SMTRI J-REIT 総合指数」を、そしてリートとともに REOC（Real Estate Operating Companies、上場された不動産企業の株式）の動向も観測するため、「配当込東証業種別　不動産業」を採用した。債券には野村証券金融工学研究センター／金融市場場調査部の「Nomura BPI 国債除く」、国債には「Nomura BPI 国債のみ」を採用した。不動産には MSCI Inc. の「IPD 不動産投資指数」･「IPD JREIT 直接不動産投資指数」･「IPD JREIT ファン

112期、月次データ、2001年 9 月～2010年12月、10変数

No.	変数名		略称
1	IPD 不動産投資指数	ipd_property	Property
2	IPD JREIT 不動産投資指数	ipd_jreit_dp	JREIT_IP
3	IPD JREIT ファンドレベルリターン指数	ipd_jreit_fundlevel	JREIT_FD
4	SMTRI JREIT 指数	smtb_jreit	JREIT_SM
5	東証業種別不動産業指数	tosho_real_estate	TOSHO_RE
6	TOPIX 指数	topix	TOPIX
7	TOPIX500指数	topix_500	TOPX_500
8	TOPIXsmall 指数	topix_small	TOPX_SML
9	Nomura BPI（国債除く）指数	nomura_bpi_exc_gbond	NG_BOND
10	Nomura BPI（国債のみ）指数	nomura_bpi_gbond	GV_BOND

ド・レベル・リターン指数」を用いる。採用したものはすべて配当込もしくは総合収益を表す指数であり、本論文でリターンと言う場合、特段に言い換える場合を除き、この総合リターンを指す。用いる指数の観測期間は、2001年9月から2010年12月である。

3.2　分析結果

データを用いた分析結果については以下の通りである。

①　h 期間保有のリターンの平均をもとに1期間当りの換算リターン $\overline{m}(h)$ を計算したものは（図3.1）、Cheng ら（図2.1）のように保有期間によって一定水準を保つという傾向は見えない。

②　基準化標準偏差 $\overline{\sigma}(h)$ を見ると（図3.2）、IPD の不動産投資指数、JREIT 指数、およびファンドレベルリターンの3指標については、保有期間25期くらいまでは Cheng らと同様に $\overline{\sigma}(h)=h$ の傾向が観測できる。保有期間がそれより増大するとむしろ $\overline{\sigma}(h)$ は減少に転ずる。一方、国債と社債については $\overline{\sigma}(h)=\sqrt{h}$ に近いが、株式と SMTRI JREIT 指数については $\overline{\sigma}(h)\neq h$、$\overline{\sigma}(h)\neq\sqrt{h}$ である。

さてこれらの観察結果を通じて、不動産に関連する指数について Non-i. i. d. 過程が検証されたと言えるだろうか。またその他の金融資産の指数については、どちらかといえば i. i. d. だと言ってよいだろうか。1期間当たりに換算したリターン $\overline{m}(h)$ はなぜ一定した水準ではないのだろうか。このままでは判断がつきかねるのが正直なところである。むしろ $\overline{\sigma}(h)$ が保有期間の増大とともに減少に転ずるのはなぜか、など付随して生ずる疑問もある。

よってここで強引に Non-i. i. d. 過程か否かを結論付けるのではなく、新たに生じた疑問を整理し、原因について仮説を立て、追加的な考察を行ってから結論を得ることにしよう。

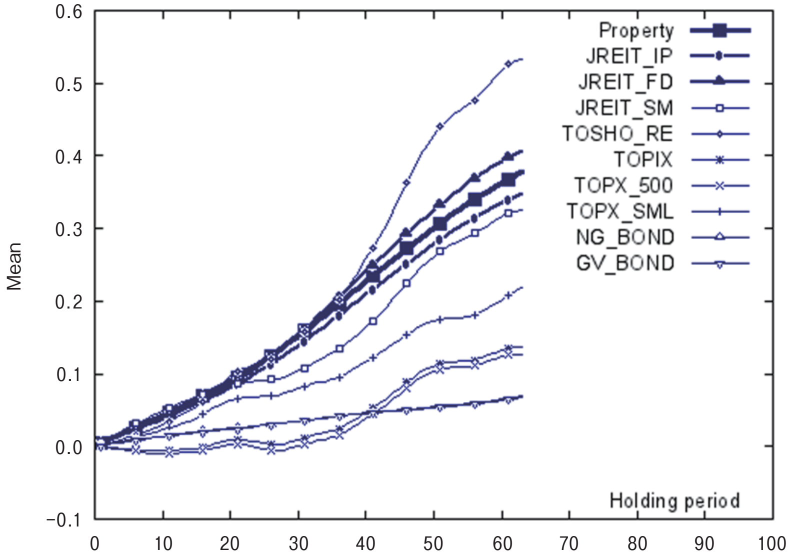
4.　仮設データによる解明

第1に、基準化標準偏差 $\overline{\sigma}(h)$ が保有期間の増大とともに減少に転ずる理由について考えよう。これはデータが実体経済の何らかの事象を反映しているというものでもなんでもなく「単にサンプリングの問題ではないか」というのが仮説である。T 期間にわたるデータから（2.15）式のように h 期間保有するときのデータ系列を作成するとき、保有期間 h が大きくなると $\log(X_{t+h}/X_t)$ を計算するときの分母 X_t が T 期間の前半だけに偏り、分子の X_{t+h} が後半だけに偏るという現象が起こる。このことがリターンの計算結果に偏りを生じさせているのではないかという仮説である。よって、T 期間という標本期間に対しあまり長い保有期間のデータ系列の作成を望んではいけないのである。

第2に、1期間当たりの換算リターン $\overline{m}(h)$ はなぜ一定水準ではないのかという点である。これについても上に挙げた「サンプリング問題」が理由である、という

図3.1　保有期間の増大に伴うリターンの平均の変化：(1) $m(h)$、(2) $\overline{m}(h)$

(1)　Mean of return by holding-period (h)



(2)　'Mean of return/h' by holding-period (h)

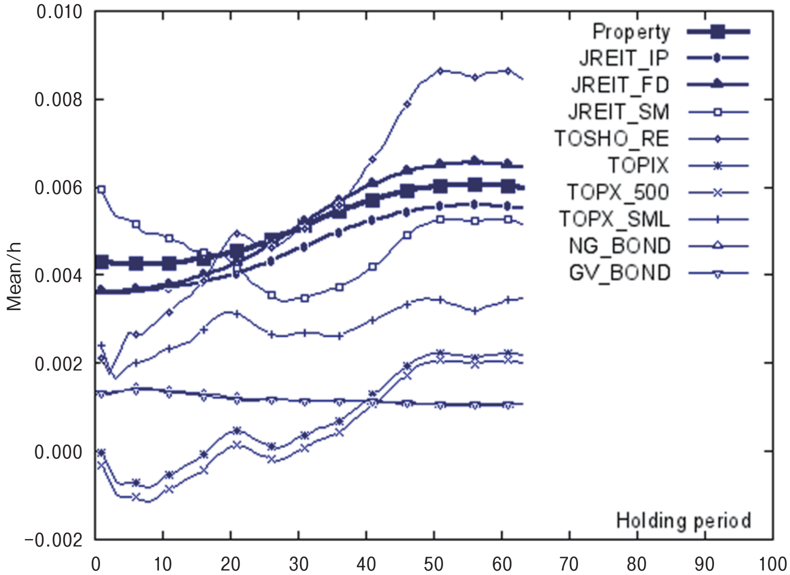
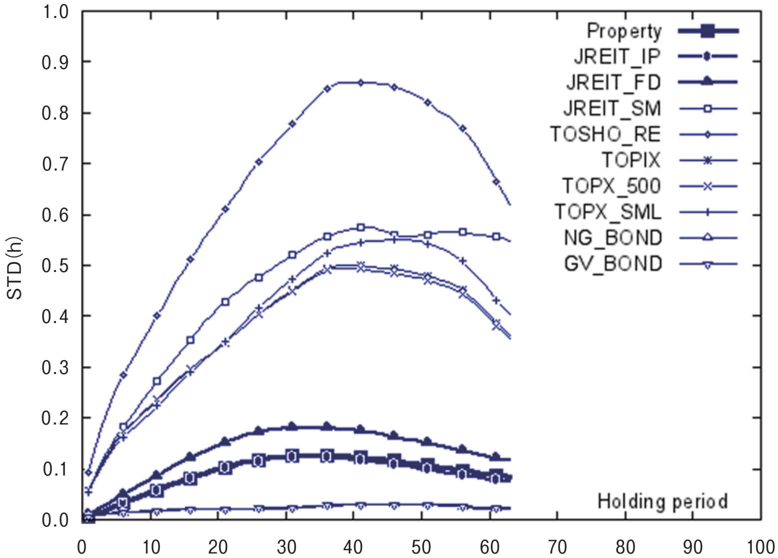
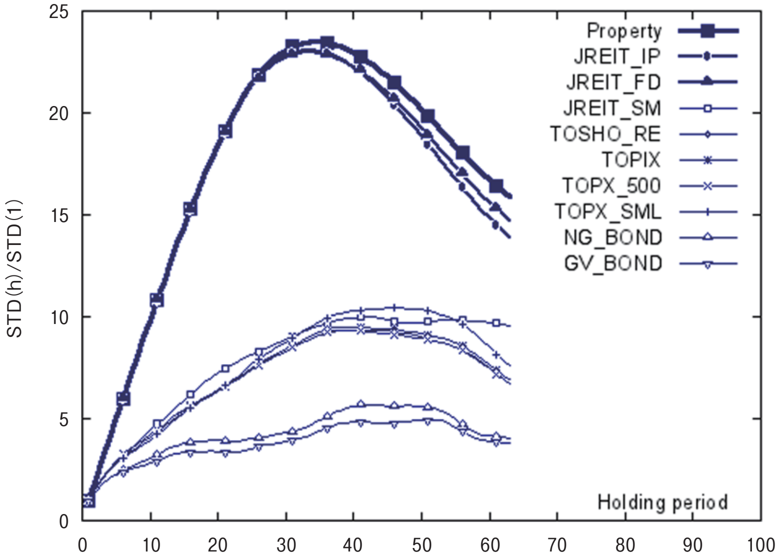


図3.2　保有期間の増大に伴うリターンの標準偏差の変化：(3) $\sigma(h)$、(4) $\overline{\sigma}(h)$

(3)　STD of return by holding-period (h)



(4)　'STD(h)/STD(1)' by holding-period (h)



のがここでの仮説である。

第 3 に、本来の検証目的である i. i. d. か non-i. i. d. かの判別問題についてである。（2. 5）式のようにモデルとして $r_t = m + \varepsilon_t$ を仮定し、$\varepsilon_t \sim$ i. i. d $(0, \sigma^2)$ が成立する場合は、確かに基準化標準偏差 $\bar{\sigma}(h)$ は理論的に $\bar{\sigma}(h) = \sqrt{h}$ となる。しかし、これが成立しないとき non-i. i. d. であるが、かといってそれが直ちに $\bar{\sigma}(h) = h$ であることを意味するわけではない。なるほど Cheng らの図2. 2では、不動産関連指数は $\bar{\sigma}(h) = h$ で、金融資産の指数は $\bar{\sigma}(h) = \sqrt{h}$ という 2 分法的な結果であった。しかし、われわれのデータによれば図3. 1と図3. 2にみるように、2 極の中間に位置づくようなグラフ形状の指数が存在する。そうなる理由は、「non-i. i. d. には多様なバリエーションがある」からだと考えられる。つまり、モデルの基本形が $r_t = m + \varepsilon_t$ であっても、ε_t が i. i. d. ではない時系列モデルの過程にしたがう場合である。例として、定常な自己回帰移動平均過程（ARMA）、単位根を含む自己回帰和分移動平均過程（ARIMA）などを挙げることができる。正確にどのような時系列モデルに従うのかを明らかにするのは後の章以降の課題である。ここでは、何らかの non-i. i. d. 過程をモデルとして仮定したとき、図3. 1と図3. 2にみるような、$\bar{\sigma}(h) = \sqrt{h}$ と $\bar{\sigma}(h) = h$ との中間に位置するようなグラフ形状が現れ得ることを示せればよい。

4.1　分析手法

さて、これら「サンプリング仮説」と「non-i. i. d. 過程仮説」とを検証するため、以下のように仮設のデータを生成してこれまでと同様に「h 期間保有リターンの平均と標準偏差」を観測してみることにする。

(1) 「サンプリング仮説」を検証するため、データ件数を120期とした場合と、500期とした場合との 2 ケースについて比べてみる。

(2) 「non-i. i. d. 過程仮説」を検証するため、いく通りかの AR 過程を仮定してデータを生成してみる。併せて i. i. d. 過程も仮定する。

仮定したケースは次のとおりである。

① i. i. d. ケース

$$r_t = m + \varepsilon_t \tag{4. 1}$$
$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2),\ m = 0.004,\ \sigma = 0.004$$

② AR(1)-1ケース（単位根過程にかなり近い定常過程）

$$r_t = m + y_t \tag{4. 2}$$
$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \Leftrightarrow (1 - \alpha_1 L) y_t = \varepsilon_t$$
$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2),\ m = 0.004,\ \sigma = 0.004,\quad \text{特性根の逆数}\ \alpha_1 = 0.99$$

③　AR(1)-2ケース（ふつうの定常過程、2極の中間に位置づくと予想）

$$r_t = m + y_t \qquad (4.3)$$
$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \Leftrightarrow (1-\alpha_1 L) y_t = \varepsilon_t$$
$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2),\ m=0.004,\ \sigma=0.004$,　特性根の逆数 $\alpha_1=0.5$

④　AR(2)ケース（単位根過程にやや近い定常過程、2極の中間に位置づくと予想）

$$r_t = m + y_t \qquad (4.4)$$
$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t \Leftrightarrow (1-\alpha_1 L)(1-\alpha_2 L) y_t = \varepsilon_t$$
$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2),\ m=0.004,\ \sigma=0.004$,　特性根の逆数 $\alpha_1=0.9, \alpha_2=0.7$

⑤　AR(3)ケース（単位根過程にやや近い定常過程、2極の中間に位置づくと予想）

$$r_t = m + y_t \qquad (4.5)$$
$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \phi_3 y_{t-3} + \varepsilon_t \Leftrightarrow (1-\alpha_1 L)(1-\alpha_2 L)(1-\alpha_3 L) y_t = \varepsilon_t$$
$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2),\ m=0.004,\ \sigma=0.004$,　特性根の逆数 $\alpha_1=0.9, \alpha_2=0.7, \alpha_3=0.5$

4.2　分析結果

分析結果をみていこう。データ件数120期のときの生成データの状況は図4. 1である。500期のときの状況は図4. 4である。

第1に、基準化標準偏差 $\bar{\sigma}(h)$ を比較すると、120期ケースでは保有期間が増大すると減少に転ずる現象が依然として存在するが（図4. 3）、500期ケースになるとそうした現象はきれいに消えて $\bar{\sigma}(h)$ は単調増加になっている（図4. 6）。

①　つまり「サンプリング仮説」が実証された。やはり、標本期間に対してあまり長い保有期間の分析は適さないわけである。おおまかに標本期間の1/3から1/4までが限度であろう。

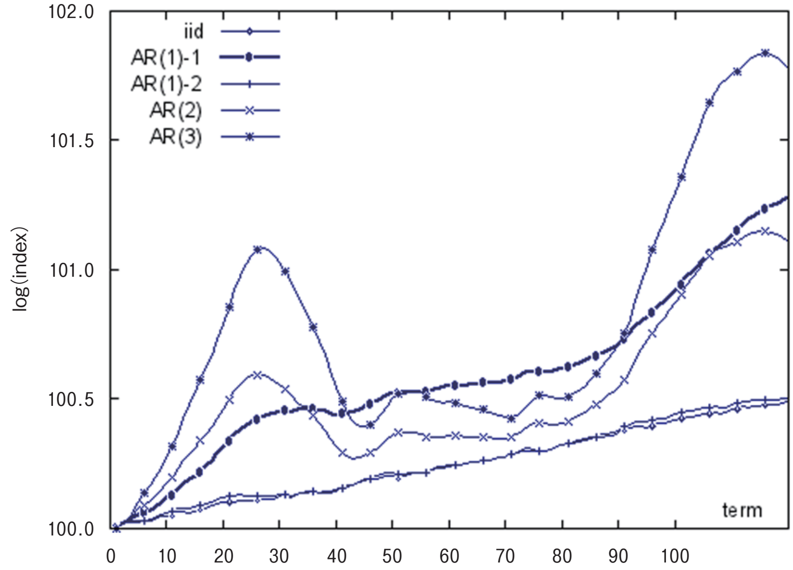
②　図4. 6でさらにグラフを読み取ると、単位根過程にかなり近い AR(1)-1ケースだけがほぼ $\bar{\sigma}(h)=h$ を満たしている。すると直観的に、「$\bar{\sigma}(h)=h$ を満たす過程の1つは単位根過程なのか」という新たな仮説が立てられそうである。

③　われわれの実データによる分析結果については、図3. 1と図3. 2を読み取るときは、保有期間30くらいまでのグラフを適切な分析結果として読み取ればよい。すると、IPD 不動産投資指数については Cheng らが示したのと同様に $\bar{\sigma}(h)=h$ に近い傾向が現れていると結論付けることができる。

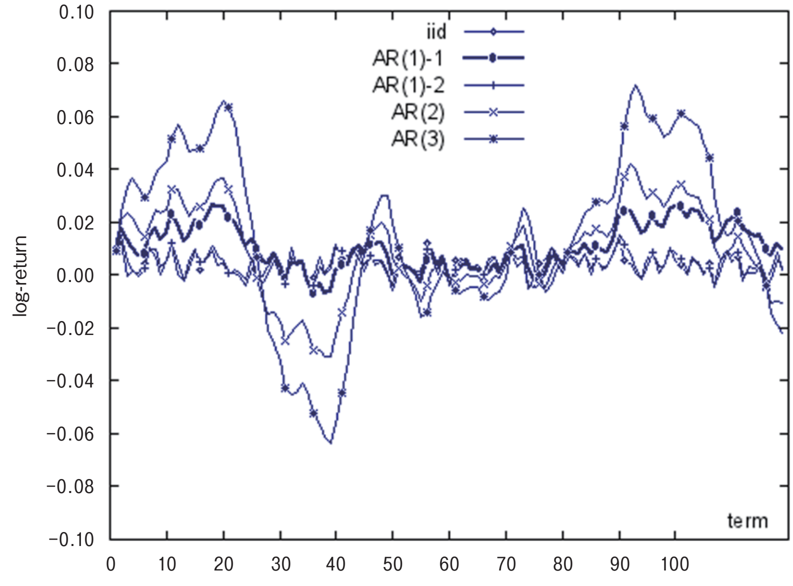
④　しかも、Cheng らにおいてもわれわれのデータにおいても、それらは単位根過程に近いものではないかと仮説される。ただし、他の時系列モデルの過程からも類似の現象が生ずるかもしれないので、ここだけの観測結果からは単位

図4.1　追試験のため生成したデータ（120期）：⑸原指数（対数）、⑹対数リターン

⑸　Generated log（index）data



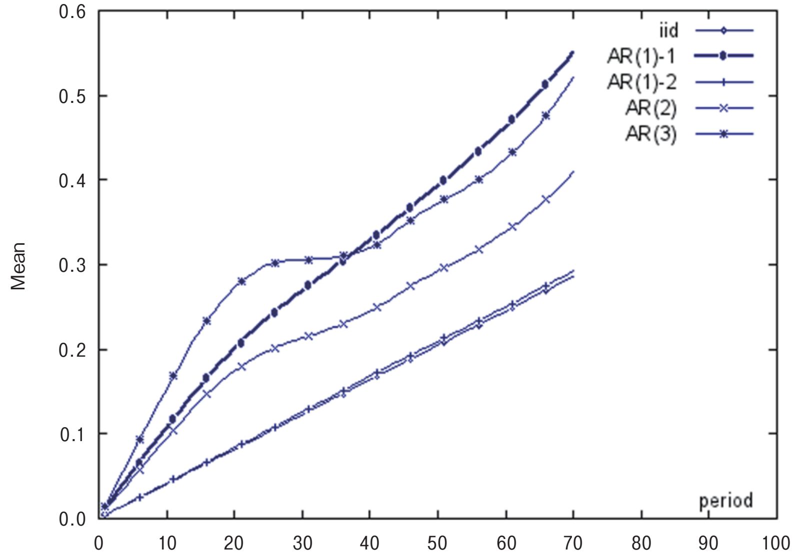
⑹　Generated log-return data



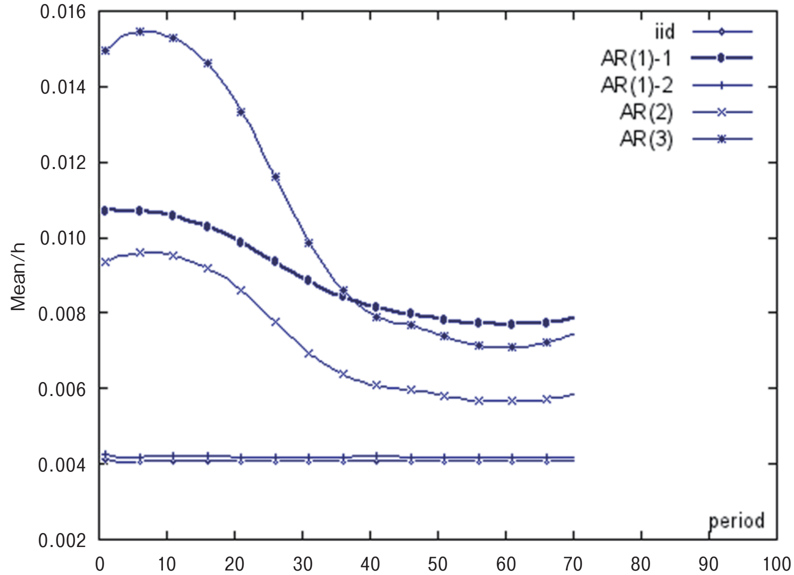
（注）　AR⑴-1ケース：特性根＝0.99,　　AR⑴-2ケース：特性根＝0.5,
　　　AR⑵ケース：特性根＝0.9, 0.7,　　AR⑶ケース：特性根＝0.9, 0.7, 0.5

図4.2　保有期間の増大に伴うリターンの平均の変化（120期）：(1) $m(h)$、(2) $\overline{m}(h)$

（1）　Mean of return by holding-period（h）



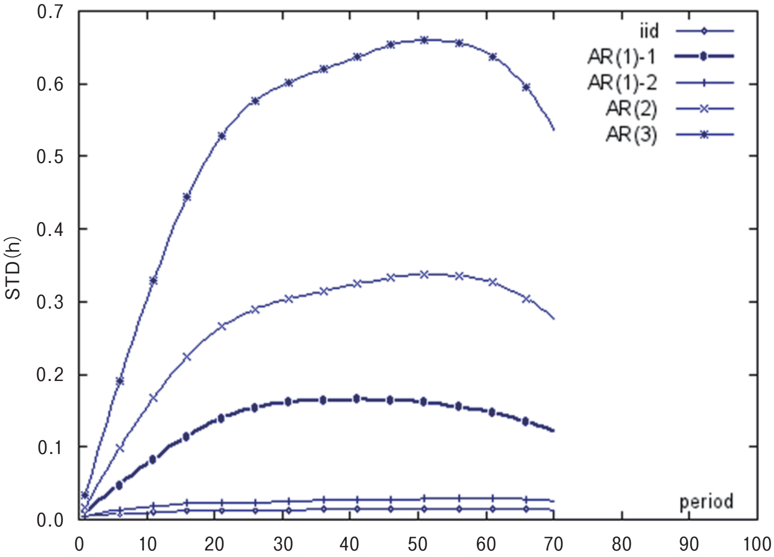
（2）　'Mean of return/h' by holding-period（h）



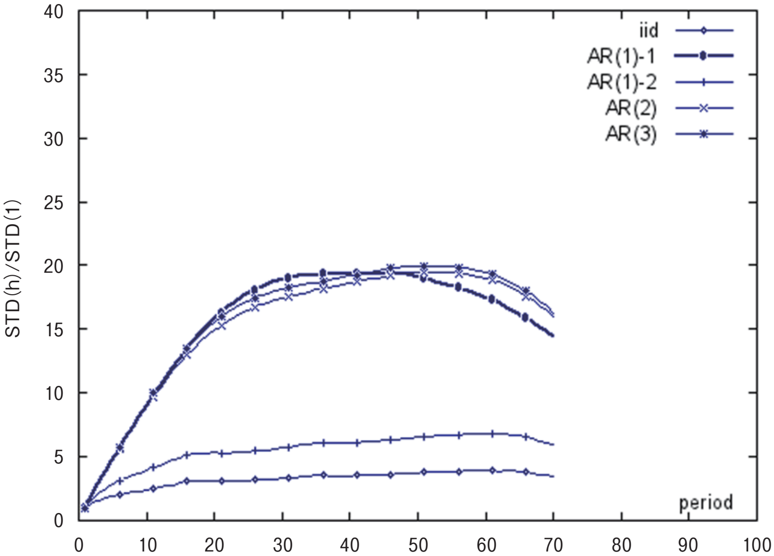
（注）　AR(1)-1ケース：特性根＝0. 99,　　AR(1)-2ケース：特性根＝0. 5,
　　　AR(2)ケース：特性根＝0. 9，0. 7,　　AR(3)ケース：特性根＝0. 9，0. 7，0. 5

図4.3　保有期間の増大に伴うリターンの標準偏差の変化（120期）：⑶ $\sigma(h)$、⑷ $\overline{\sigma}(h)$

⑶　STD of return by holding-period（h）



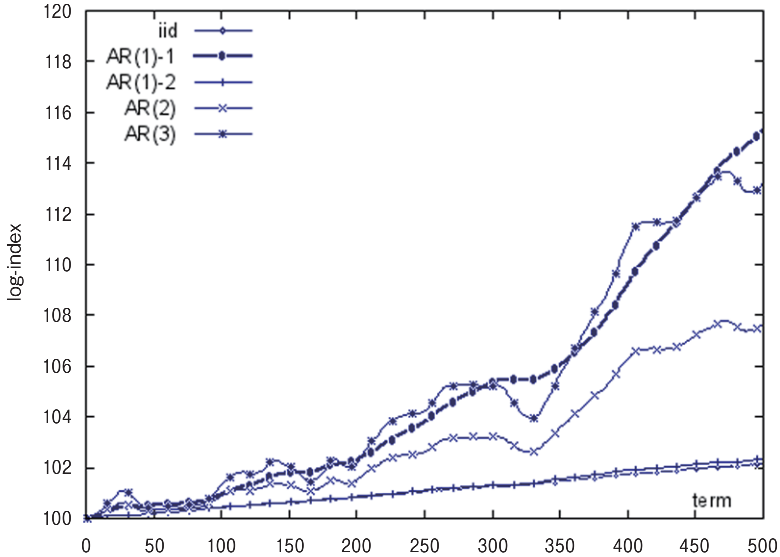
⑷　‘STD(h)/STD(1)’ by holding-period（h）



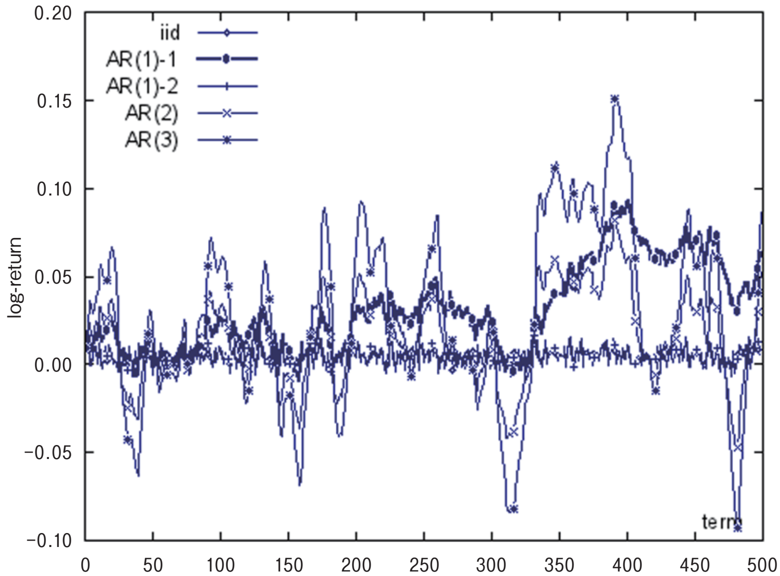
（注）　AR⑴-1ケース：特性根＝0. 99,　　　AR⑴-2ケース：特性根＝0. 5,
　　　AR⑵ケース：特性根＝0. 9, 0. 7,　　AR⑶ケース：特性根＝0. 9, 0. 7, 0. 5

図4.4　追試験のため生成したデータ（500期）：⑸原指数（対数）、⑹対数リターン

⑸　Generated log-index data



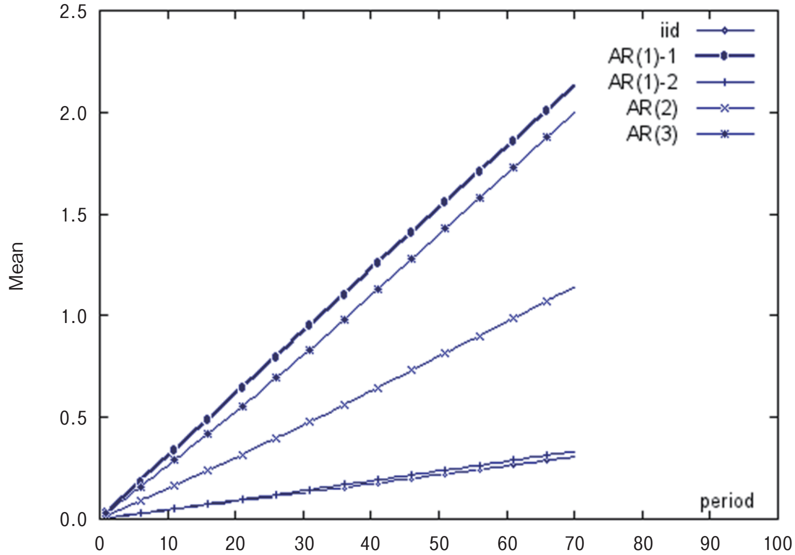
⑹　Generated log-return data



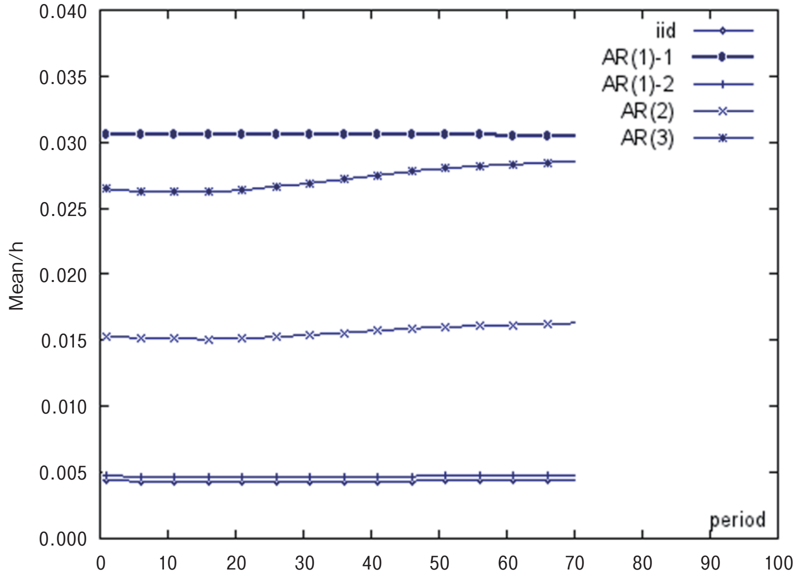
（注）　AR⑴-1ケース：特性根＝0.99,　　AR⑴-2ケース：特性根＝0.5,
AR⑵ケース：特性根＝0.9, 0.7,　　AR⑶ケース：特性根＝0.9, 0.7, 0.5

図4.5　保有期間の増大に伴うリターンの平均の変化（500期）：(1) $m(h)$、(2) $\overline{m}(h)$

(1)　Mean of return by holding-period (h)



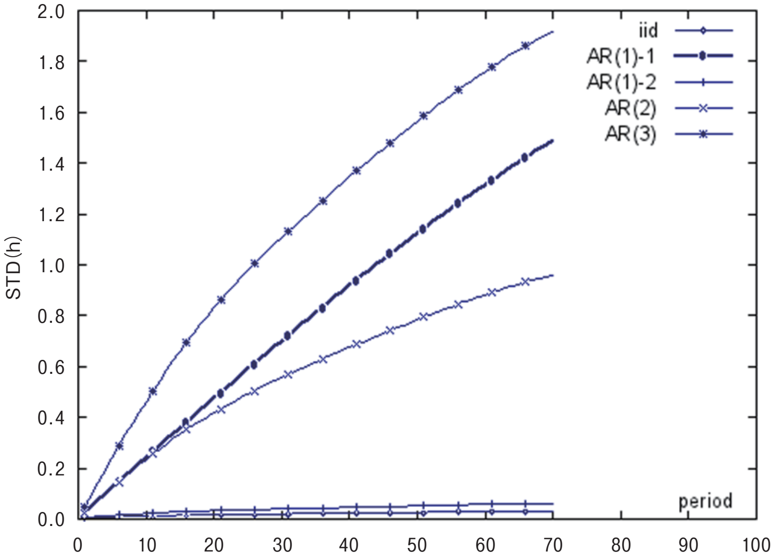
(2)　'Mean of return/h' by holding-period (h)



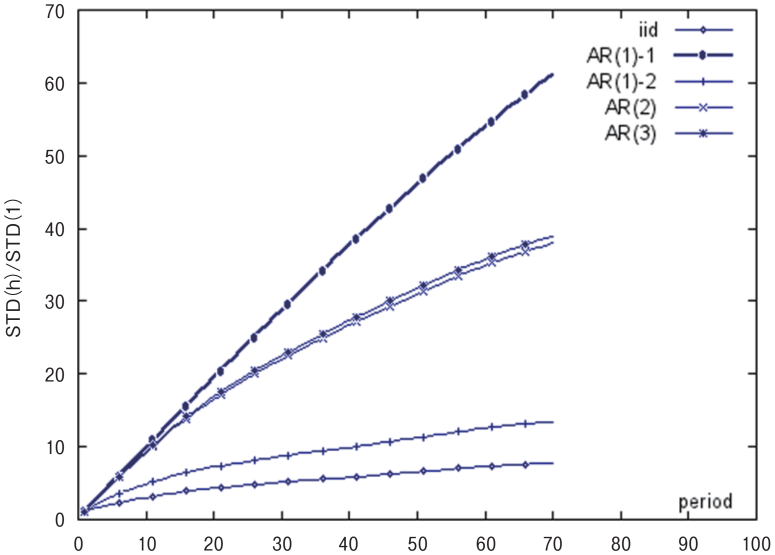
（注）　AR(1)-1ケース：特性根＝0.99,　　AR(1)-2ケース：特性根＝0.5,
AR(2)ケース：特性根＝0.9,　0.7,　　AR(3)ケース：特性根＝0.9,　0.7,　0.5

図4.6　保有期間の増大に伴うリターンの標準偏差の変化（500期）：(3) $\sigma(h)$、(4) $\overline{\sigma}(h)$

(3)　STD of return by holding-period (h)



(4)　'STD(h)/STD(1)' by holding-period (h)



（注）　AR(1)-1ケース：特性根＝0.99,　　AR(1)-2ケース：特性根＝0.5,
AR(2)ケース：特性根＝0.9, 0.7,　　AR(3)ケース：特性根＝0.9, 0.7, 0.5

根過程とは断定できない。その仮説を検証するのはこの後の章の課題である。

第 2 に、1 期間当たりの換算リターン $\overline{m}(h)$ についても比較してみよう。120期ケースでは（図4. 2）$\overline{m}(h)$ は一定しないが、500期ケースになると（図4. 5）$\overline{m}(h)$ はほぼ一定水準を保つことが顕著である。AR 過程のケースとして仮定したモデルの確率攪乱項 y_t は non-i. i. d. だが $\mathrm{E}[y_t]=0$ を満たすから、こうした結果が得られることは理論的予想と一致するものである。これもまた「サンプリング仮説」が正しいことを検証したことになる。

第 3 に、「non-i. i. d. 過程仮説」である。図4. 6を再度読み取ると、AR (1)-1ケースは $\overline{\sigma}(h)=h$ に近く、i. i. d. ケースは当然ながら $\overline{\sigma}(h)=\sqrt{h}$ に近い。そしてその 2 極のあいだに位置するのが AR (1)-2ケース、AR (2)ケース、AR (3)ケースである。つまり、non-i. i. d. 過程といっても多様であり、AR 過程だけでもこうした多様なデータ系列を生ずることができた。このことの含意はこうである。

① non-i. i. d. 過程とはいえ、それが AR 過程のような定常過程である可能性があり、その場合には将来を予測するときの予測誤差の増大（分散の増大）は Cheng らが主張するほど大きいものではないかもしれない。

② 一方、単位根過程だとするとその予測誤差は大きく増大することが予想される。

③ いずれにしても、どのような時系列モデルにしたがうのか、またその場合の将来の予測誤差はどれだけのものとして評価されるのか、といったことが後の章での分析課題となる。

5. ここまでの整理と時系列分析の必要性

① われわれのデータにおいても、不動産のリターンには Cheng らが指摘したのと同様の Non-i. i. d. 過程、すなわち「リターンの分散が保有期間の 2 乗で増大する傾向」（これを $h^2\sigma^2$ 法則と呼ぶことにする）があることを観測することができた。ただし SMTRI JREIT 指数ではそうではない。よって、注意深く言うならば、不動産指数全般について一般的に Non-i. i. d. 過程（$h^2\sigma^2$ 法則）があてはまるというわけではなく、用いる指数によるものと思われる。それでも、株式等の金融資産とは異なる時系列特性があることは注目すべきである。

② $h^2\sigma^2$ 法則の背後には単位根過程があるかもしれないことが示唆された。しかし正確にそうかどうかはここでの分析だけからは断定できない。また $h^2\sigma^2$ 法則が単位根過程以外の時系列的過程からも生じ得るものなのか、それもここでの分析だけからは断定できない。

③ Cheng らは資産のリターンが i. i. d. か non-i. i. d.（$h^2\sigma^2$ 法則）かという 2 分法的な問題設定で分析をしているが、実際には Non-i. i. d. 過程とはいえ $h^2\sigma^2$ 法則には従わない多様な時系列モデルのバリエーションがある。ここでは AR 過程の仮設例を用いてその一部を生成することができた。定常過程であれば将来のポートフォリオ選択におけるリターンのリスク（分散）の予測には予測誤差などの指標を

使える可能性がある。つまり Cheng らが指摘するような $h^2\sigma^2$ 法則だけに注目する必要はないと考える。

④　Cheng らが行った資産保有期間とリターンとの関連分析は、多分に記述統計の域を出ない。将来のポートフォリオ選択におけるリターンのリスク（分散）の予測という観点から言えば、やはり個々の資産がどのような時系列モデルの過程に従うかをより系統的に分析する必要がある。そうすれば、将来のリスク（分散）が $h^2\sigma^2$ 法則に従うのか、あるいは別の増大法則に従うのかを見極めることができるであろう。

6.　単位根検定からみる不動産の i. i. d 過程

前章まで Cheng らの指摘する Non-i. i. d 過程について整理してきた。しかし、同特性は彼らが記述統計的にまとめたものにすぎない。投資家にとってのリスクとは、投資に当たっての予測誤差である。つまり、不動産のリスクはこの予測誤差の枠組みで議論するほうが適切である。そこで本章では、同特性をより時系列分析の観点から解明していく。

6.1　検定の方法

対象とする時系列データが定常過程に従うかどうかの判断は、今後の分析モデルの選択とその結果の解釈を左右する。そこでまず、各時系列データについて単位根検定を行い定常か非定常かを判定することにしよう。単位根検定では、ごく基本的な ADF 検定（Said & Dickey, 1984）と PP 検定（Phillips & Perron, 1988）がある。ADF 検定では次のような 3 種の AR（p）モデル（Autoregressive Model、自己回帰モデル）を想定し単位根が含まれていないかどうかを判定する。

①　定数項のみあり：　$y_t = a_{0_{t-1}} + u_t$

②　定数項あり・トレンド項あり：$y_t = a_{0_{t-1}} + a_2 t + u_t$

③　定数項なし・トレンド項なし：$y_t = p y_{t-1} + u_t$

一方 PP 検定は、特段にラグ次数 p を指定しないノンパラメトリックな方法である。ADF 検定、PP 検定は帰無仮説「H_0：単位根あり」を検定するものである。しかし、一般にそれら検出力は弱いといわれている。つまり、単位根がなく定常過程が真であるとしても、検出力が弱いため帰無仮説「H_0：単位根あり」を棄却できず、誤って非定常過程として採択してしまう危険性がある。そこでここでは、これらの検定を改良した DF-GLS 検定（Elliott *et al*, 1996）と NP 検定（Ng & Perron, 2001）、さらに視点を変えた KPSS 検定（Kwiatkowski *et al*, 1992）を用いて検定を行うことにする。DF-GLS 検定は、ADF 検定を改良したもので、同じく帰無仮説「H_0：単位根あり」を検定するものである。NP 検定は、PP 検定を改良したもので、同じく帰無仮説「H_0：単位根あり」を検定するものである。一方、KPSS 検定は逆に帰無仮説「H_0：単位根なし」を検定するものである。

なお、検定にかけるモデル式の仮定についてであるが、機械的に「定数項あり・

トレンドあり」のケースを階差データに対しても適用することは必要ではない。時間tを含むトレンド項が効くのは、原指数を意味するレベルデータに対してのことであろうと考えられる。つまり原指数の上昇基調などを表現するときに有効になるものであろう。一方、階差をとって収益率ベースの指標にしたときは、それが一方的に上昇基調などになるとは考え難い。こうした理由から、ここでは階差データに対しては「定数項あり・トレンドあり」のケースの検定を行わないことにした。

さて、単位根検定の結果は次に示す表6. 1、表6. 2、表6. 3のようになる。これをみると、まずIPD不動産投資指数（表6. 1）については、2階差をとれば定常になるようである。一方、IPD JREIT不動産投資指数（表6. 2）とIPD JREITファンド・レベル・リターン指数（表6. 3）については、1階差をとればほぼ定常であることがここでの検定で示されている。

表6.1　IPD不動産投資指数

検定の種類	検定統計量	レベル（定数項あり）	レベル（定数項・トレンドあり）	1階差（定数項あり）	2階差（定数項あり）
DG-GLS	t	－　非定常	＊　定常	－　非定常	＊＊＊　定常
NP	MZa	－　非定常	＊＊＊　定常	－　非定常	＊＊＊　定常
	MZt	－　非定常	＊＊＊　定常	－　非定常	＊＊＊　定常
	MSB	－　非定常	＊＊＊　定常	－　非定常	＊＊＊　定常
	MPT	－　非定常	＊＊＊　定常	－　非定常	＊＊＊　定常
KPSS	LM	†††非定常	††　非定常	†　非定常	＝　定常

－：「H_0単位根あり」を棄却できない。非定常。
＊：10％有意水準で「H_0単位根あり」を棄却。定常。
＊＊：5％有意水準で同上。
＊＊＊：1％有意水準で同上。
＝：「H_0単位根なし」を棄却できない。定常。
†：10％有意水準で「H_0単位根なし」を棄却。非定常。
††：5％有意水準で同上。
†††：1％有意水準で同上。

表6.2　IPD JREIT不動産投資指数

検定の種類	検定統計量	レベル（定数項あり）	レベル（定数項・トレンドあり）	1階差（定数項あり）	2階差（定数項あり）
DG-GLS	t	－　非定常	－　非定常	＊　定常	＊＊＊　定常
NP	MZa	－　非定常	＊＊＊　定常	＊＊　定常	－　非定常
	MZt	－　非定常	＊＊＊　定常	＊＊　定常	－　非定常
	MSB	－　非定常	＊＊＊　定常	＊＊　定常	－　非定常
	MPT	－　非定常	＊＊＊　定常	＊＊　定常	－　非定常
KPSS	LM	†††非定常	††　非定常	＝　定常	＝　定常

－：「H_0単位根あり」を棄却できない。非定常。
＊：10％有意水準で「H_0単位根あり」を棄却。定常。
＊＊：5％有意水準で同上。
＊＊＊：1％有意水準で同上。
＝：「H_0単位根なし」を棄却できない。定常。
†：10％有意水準で「H_0単位根なし」を棄却。非定常。
††：5％有意水準で同上。
†††：1％有意水準で同上。

表6.3　IPD JREIT ファンド・レベル・リターン指数

検定の種類	検定統計量	レベル（定数項あり）	レベル（定数項・トレンドあり）	1階差（定数項あり）	2階差（定数項あり）
DG-GLS	t	－　非定常	＊＊＊　定常	＊　定常	＊　定常
NP	MZa	－　非定常	＊＊＊　定常	＊＊＊　定常	－　非定常
	MZt	－　非定常	＊＊＊　定常	＊＊＊　定常	－　非定常
	MSB	－　非定常	＊＊＊　定常	＊＊　定常	－　非定常
	MPT	－　非定常	＊＊＊　定常	＊＊＊　定常	－　非定常
KPSS	LM	†††非定常	††　非定常	＝　定常	＝　定常

－：「H_0単位根あり」を棄却できない。非定常。
＊：10％有意水準で「H_0単位根あり」を棄却。定常。
＊＊：５％有意水準で同上。
＊＊＊：１％有意水準で同上。
＝：「H_0単位根なし」を棄却できない。定常。
†：10％有意水準で「H_0単位根なし」を棄却。非定常。
††：５％有意水準で同上。
†††：１％有意水準で同上。

7.　時系列モデルによる予測誤差の検証

7.1　ARIMA 過程によるモデル化

投資家がポートフォリオ運営を行う際に注意を払うリスクとは、ポートフォリオ内資産の予測誤差である。投資家は単純な記述的分析を用いるのではなく、条件付分散を用いてポートフォリオを選択していく。同条件付分散より離れる予測出来ない部分こそ投資家にとっての真のリスクであるといえる。

前述においてすべてのデータにはレベル段階において非定常性がある（和分過程が含まれている）ことがわかった。そこで本章では和分過程を含む ARIMA 過程を想定し、時系列モデルを推定してみよう。

３つの指数データについて和分次数が定まったので、ARIMA モデルを推定してみることにしよう。表7.1にいくつかのケースの推定結果の AIC をまとめた。これに基づいてモデルを選択するとともに、係数の t 検定についても検討した。

IPD 不動産投資指数については AIC の最も小さい ARIMA（3, 2, 0）モデルを採択することができる。ただしその場合 AR⑴の係数の推定値については t 統計量が５％有意水準を満たさない結果となっている（表7.1）。しかしそう致命的なものではない。

IPD JREIT 不動産投資指数については同じく AIC の最も小さい ARIMA（3, 1, 2）モデルを採択することができる。係数の推定値も十分に有意である（表7.1）。

IPD JREIT ファンド・レベル・リターン指数についてはやや注意を要する。これについても AIC が最小となる ARIMA（3, 1, 1）を採択したいが、分析結果によると推定された AR 過程の特性方程式の根の絶対値が１より小さいため定常な ARIMA 過程にならない。次の順位の AIC の ARIMA（3, 1, 2）も同じ理由から定常とならない。さらに次の ARIMA（3, 1, 3）は定常であるが係数の推定値が有意水準を満たさない。結局 ARIMA（3, 1, 0）が、AIC も小さく係数の推定値も有意水準を満たし、AR 過程の特性方程式の根の絶対値が１より大きく定常であるので、これを採択することとしたい（表7.1）。

表7.1　不動産投資関連指数のARIMA（*p*, *d*, *q*）モデルのAICとモデルの採択

IPD不動産投資指数		IPD JREIT不動産投資指数		IPD JREITファンド・レベル・リターン指数	
ARIMA(0, 2, 1)	−11. 59623	ARIMA(0, 1, 1)	−8. 605107	ARIMA(0, 1, 1)	−7. 834070
ARIMA(0, 2, 2)	−11. 66782	ARIMA(0, 1, 2)	−9. 312862	ARIMA(0, 1, 2)	−8. 570446
ARIMA(0, 2, 3)	−11. 75034	ARIMA(0, 1, 3)	−9. 650005	ARIMA(0, 1, 3)	−8. 911661
ARIMA(1, 2, 0)	−11. 65302	ARIMA(1, 1, 0)	−10. 44754	ARIMA(1, 1, 0)	−9. 811300
ARIMA(1, 2, 1)	−11. 78496	ARIMA(1, 1, 1)	−10. 43390	ARIMA(1, 1, 1)	−9. 797042
ARIMA(1, 2, 2)	−11. 80304	ARIMA(1, 1, 2)	−10. 46782	ARIMA(1, 1, 2)	−9. 851783
ARIMA(1, 2, 3)	−11. 78927	ARIMA(1, 1, 3)	−10. 47484	ARIMA(1, 1, 3)	−9. 855876
ARIMA(2, 2, 0)	−11. 75534	ARIMA(2, 1, 0)	−10. 42621	ARIMA(2, 1, 0)	−9. 789347
ARIMA(2, 2, 1)	−11. 79842	ARIMA(2, 1, 1)	−10. 44223	ARIMA(2, 1, 1)	−9. 800459
ARIMA(2, 2, 2)	−11. 83564	ARIMA(2, 1, 2)	−10. 42962	ARIMA(2, 1, 2)	−9. 787061
ARIMA(2, 2, 3)	−11. 81773	ARIMA(2, 1, 3)	−10. 48899	ARIMA(2, 1, 3)	−9. 831347
ARIMA(3, 2, 0)	−11. 88992	ARIMA(3, 1, 0)	−10. 50946	ARIMA(3, 1, 0)	−9. 850260
ARIMA(3, 2, 1)	−11. 87169	ARIMA(3, 1, 1)	−10. 51458	ARIMA(3, 1, 1)	−9. 929770
ARIMA(3, 2, 2)	−11. 86080	ARIMA(3, 1, 2)	−10. 64948	ARIMA(3, 1, 2)	−9. 912308
ARIMA(3, 2, 3)	−11. 85216	ARIMA(3, 1, 3)	−10. 63151	ARIMA(3, 1, 3)	−9. 851022

（注）　網掛けのモデルを採択した。

7.2　GARCHによるボラティリティ変動分析

ここではIPD不動産投資指数、IPD JREIT直接不動産投資指数そしてIPD JREITファンド・レベル・リターン指数の時系列変動に注目して、そのボラティリティの均一性・不均一性を分析することにする。

ここでいうボラティリティは、指数データの変動のうち、前節で採択したARIMAモデルで確定的に予測できる部分に対し、予測不可能な個所としてなお残る残差の変動を表す標準偏差（または分散）のことを指している。このボラティリティには、一定の期間に変動が大きく持続する期間がある場合を指摘されており、これはボラティリティ・クラスタリングvolatility clusteringと呼ばれる。このボラティリティの変動をGARCHモデルで分析することにする。このGARCH分析は、ボラティリティに対するショックの持続性を図るARCH分析に過去のボラティリティを考慮したモデルでBollerslev（1986）によって提案された：

$$\sigma_t^2=\omega+\sum_{i=1}^{p}\beta_i\sigma_{t-1}^2+\sum_{j=1}^{q}\alpha_j\epsilon_{t-j}^2$$

$$\omega>0, i=1, 2, ..., p; j=1, 2, ..., q$$

それぞれの指数について、上で推定されたARIMAモデルを適用しその残差に対し、GARCHモデルを適用した結果のAICをまとめたものが表7. 2である。ここでもAICの最も小さいものをモデルとして採択する。

表7.2　不動産投資関連指数のボラティリティの GARCH（*p*, *q*）モデルの AIC とモデルの採択

IPD 不動産投資指数		IPD JREIT 不動産投資指数		IPD JREIT ファンド・レベル・リターン指数	
GARCH(0, 1)	−11.85375	GARCH(0, 1)	−10.77015	GARCH(0, 1)	−10.02228
GARCH(0, 2)	−11.87654	GARCH(0, 2)	−10.74976	GARCH(0, 2)	−10.00145
GARCH(1, 0)	−11.91054	GARCH(1, 0)	−10.65659	GARCH(1, 0)	−9.857101
GARCH(1, 1)	−11.90749	GARCH(1, 1)	−10.85913	GARCH(1, 1)	−9.971706
GARCH(1, 2)	−11.87287	GARCH(1, 2)	−10.86976	GARCH(1, 2)	−9.954552
GARCH(2, 0)	−11.90675	GARCH(2, 0)	−10.78099	GARCH(2, 0)	−9.852299
GARCH(2, 1)	−11.87650	GARCH(2, 1)	−10.73180	GARCH(2, 1)	−9.955249
GARCH(2, 2)	−11.86413	GARCH(2, 2)	−10.74781	GARCH(2, 2)	−9.936973

（注）　網掛けのモデルを採択した。

IPD 不動産投資指数については GARCH（1, 0）が採択される（表7.2）。しかしながら、説明変数の残差２乗の項の係数の値が有意水準10％でも有意とはならない。つまり「係数の値＝０」という帰無仮説を棄却できない。自由度調節済みの決定係数（R^2 値）も0.3と小さい。要するにうまく GARCH モデルが当てはまらない。このことは、ARIMA モデルが予測確定的に変化をなぞった後の残差については、ボラティリティの変動が不均一ではなく均一であることを示唆するものであろう。

IPD JREIT 不動産投資指数については GARCH（1, 2）が採択される（表7.2）。しかし３つの説明変数のすべてにおいて係数の値が有意ではない。ここから示唆されることも上と同じく、分析期間を通じてボラティリティは不均一ではなく均一ということであろう。なお、より正確には「すべての係数＝０」という帰無仮説を検定すればよい。

IPD JREIT ファンド・レベル・リターン指数については GARCH（0, 1）が採択される（表7.2）。ここでは、説明変数のラグ付ボラティリティの係数が有意に効いていることが読み取れる。つまり、ボラティリティの変動は不均一であることになる。

8.　本研究のまとめ

本研究では、Cheng らが、不動産の非流動性の一つとして定義する Non-i. i. d. 過程について詳しく議論してきた。Cheng らは、Non-i. i. d. 過程により、不動産の投資分散が長期保有と供に増幅され長期保有を妨げるとして、彼らのポートフォリオ選択モデル内で支配的な役割を与えていた。しかし、支配的な役割を与えているにも関わらず、一見するとこの主張はなんら時系列的な評価に基づくものではなかった。そこでその特性について時系列的に解明することを本研究の目的とした。本研究から得られた知見をまとめると以下の通りである。

①　Cheng らの指摘する Non-i. i. d. 過程、いわゆる「リターンの分散が保有期間の２乗で増大する傾向」を試験した。その結果、彼らは記述的な分散をもっ

て Non-i. i. d. 過程をファクトファインディングとして Non-i. i. d. 過程を定義したに過ぎないことがわかった。

② また、彼らの計測方法はサンプリング問題を引き起こす可能性があることからサンプル数・計測期間に応じた注意を払う必要があり、計測方法としては不安定である。

③ そこで時系列的に分析を進めてみると、同特性の背後に単位根過程またはそれに似た分布があることを指摘した。

④ ARIMA によるモデル化を実施した。投資家は予測を行いながらポートフォリオ運用を行っており、予測誤差こそが彼らにとってのリスクだからである。その結果、決定係数が少なく予測誤差が大きい結果となった。この予測誤差は保有期間の 3 乗で増大することを意味する。リターンの予測分散が保有期間の 2 乗で増幅することと同意義であり、Cheng らの指摘と同じである。

⑤ しかし、これはあくまでも不動産単体をもって分析をしたものであることを忘れてはならない。複数資産クラスの枠組みで分析を行った場合はどうだろうか、という新たな疑問がでてくる。つまり、ポートフォリオの一部として不動産を扱った場合、問題となっている誤差を減らせることができ、Cheng *et al.*（2013）が主張するような独自の動き、または暴走はしないのではないか。

⑥ 投資家は複数の資産クラスを組み合わせることによってポートフォリオを構築しており、各資産クラス間の相対的関係性によって不動産の投資妙味もかわってくる。これは現代ポートフォリオ理論（MPT）の枠組みとも一致する。この分析は今後の課題として残る。

参考文献

Bollerslev, T. (1986), Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Jounal of Econometrics*, 31, 307-327.

Cheng, P., Lin, Z. & Liu, Y. (2007). Pricing Illiquid Real Estate Assets When Returns Are Not II D. working Paper. Florida Atlantic University.

Cheng, P., Lin, Z. & Liu, Y. (2008), A Model of Time-on-Market and Real Estate Price Under Sequential Search with Recall, Journal of Real Estate Economics, v36 4, 813-843

Cheng, P., Lin, Z. & Liu, Y. (2013), Is There a Real Estate Allocation Puzzle?. The Journal of Portfolio Management. Vol. 39, No. 5, pp. 61-74

Cheng, P., Z. Lin, and Y. Liu (2010a), Illiquidity and Portfolio Risk of Thinly-traded Assets, The Journal of Portfolio Management, 36, pp. 126-138

Cheng, P., Z. Lin, and Y. Liu (2010b), Illiquidity, Transaction Cost, and Optimal Holding Period for Real Estate: Theory and Application, http://ssrn.com/abstract=1580134

Cheng, P., Z. Lin, and Y. Liu (2012), Optimal Portfolio Selection: the Role of Illiquidity and Investment Horizon, working paper, http://ssrn.com/

Chiang, Y., So, C., & Tang, B. (2008), Time- varying performance of four Asia-Pacific REIT, Journal of Property Investment & Finance, 26 (3): 210-231.

Elliott, Graham & Rothenberg, Thomas J. & Stock, James H. (1996), Efficient Tests for an Autoregressive Unit Root, Econometrica, Econometric Society, vol. 64 (4): 813-36, July.

Kwiatkowski, D., P. C. B. Phillips, P. Schmidt, Y. Shin (1992), Testing the Null Hypothesis of Stationarity against the Alternative of a Unit Root, Journal of Econometrics, 54: 159-178, North-Holland.

Lin, Z. and Y. Liu (2008), Real Estate Returns and Risk with Heterogeneous Investors, REAL

ESTATE ECONOMICS, 2008 V36 4: pp. 753–776
Lin, Z., & Y. Liu (2008), Real Estate Returns and Risk with Heterogeneous Investors, Real Estate Economics, 36, 753–776.
Ng, Serena and Pierre Perron (2001), Lag Length Selection and the Construction of Unit Root Tests with Good Size and Power, Econometrica, 69: 1519–1554.
Phillips, P. C. B. and P. Perron (1988), Testing for a Unit Root in Time Series Regression, Biometrika, 75: 335–346
Said E. and David A. Dickey (1984), Testing for Unit Roots in Autoregressive Moving Average Models of Unknown Order, Biometrika, 71: 599–607.

執筆者紹介

鈴木英晃（すずき ひであき） 麗澤大学経済社会総合研究センター客員研究員、不動産金融投資修士（英国レディング大学ヘンリービジネススクール）。主な論文に「不動産投資指数の時系列変動における特徴」日本不動産学会2013年度秋季全国大会（第29回学術講演会）論文集、pp. 151–138 共著日本不動産学会（2013. 11）、「最小分散ポートフォリオでの不動産投資の分散効果ダイナミクス」日本不動産学会2013年度秋季全国大会（第29回学術講演会）論文集、pp. 13–20　共著日本不動産学会（2013. 11）。
高辻秀興（たかつじ ひでおき） 麗澤大学経済学部教授、工学博士（東京工業大学）。主な著書に『都市づくりと土地利用』（共著、技法堂）、『現代社会と産業・技術』（共著、放送大学教育振興会）、『不動産学概論』（共著、放送大学教育振興会）、『不動産学の基礎』（共著、放送大学教育振興会）。