Reitaku International
Journal of Economic Studies
Vol.23, November 2015

長期ポートフォリオにおける非流動性を考慮した不動産投資の動学的最適化の考察

鈴木　英晃*　　高辻　秀興†

1.　研究の目的

不動産の非流動性とは「他の資産に即時的に変換して運用することができないこと」をいう。ポートフォリオ分析においては、この非流動性は扱いづらい側面を持つものの、ポートフォリオ構成比を誤ったものとしてしまうため無視することはできない。鈴木・高辻（2015）は、不動産のもつ非流動性と長期ポートフォリオ内でのその取扱いについて先行研究サーベイを通じて整理した。不動産の非流動性は、無視すると資産配分比を誇張させる要因であり、ポートフォリオ分析に欠くことができない。非流動性は様々な要因で複合的に形成されているが、特にその長い取引プロセスは、売却までの価格変動と機会費用発生などの不確実性を増加させる。高い取引費用は保持期間を長くさせるにもかかわらず、今度は不動産の期間依存性（保有期間が長くなればなるほどリスクが増加する特性）が、長期間の保有を妨げる。この非流動性を適切に反映してポートフォリオ分析を行わなわなければ、誤った資産配分結果を引き起こしてしまう。

そのためには、主要な先行研究であるCheng *et al.*（2013）が提案したような非流動性を考慮した平均分散モデルに導入することによって、より適切に投資家の選好状況を反映させることができると考える。非流動性は扱いづらい特性であるが、彼らは優れた理論構築を用いてこの特性をポートフォリオ分析に反映させている。具体的には市場停滞期間における価格変動リスクと市場環境に左右される流動性リスクを分解し、さらに不動産の期間依存性と高い取引費用を考慮している。同研究は未だに１期間平均分散モデルの拡張型ではあるが、同提案モデルによって不動産を含むポートフォリオ研究の新たな方向性が示されたといえる。

しかし、Cheng *et al.*の研究は、１期間モデルの拡張でしかなく、未だに改善の余地を残している。非流動性のため従来の１期間平均分散モデルの結果を単純に長期の将来に敷衍して解釈することができないことも示唆する。１期間モデルは、投資家が１期間のみに関心があるという近視眼的な仮定をおいて分析するものであるからして、つまり自ずと長期保有を考慮したポートフォリオの構築方法が、不動産を含むポートフォリオ選択の前提となってくる。Cheng *et al.*は、これらを工夫し１期間モデルの枠組みで長期投資家を想定し分析を行ったが、あくまでも１期間モデルの拡張であった。これは日々状況が変動する投資家の意思決定を動的に把握するものではなく、動学的最適化を行った場合にも同様の結果が得られるのかの検証が行わ

＊　麗澤大学経済社会総合研究センター客員研究員
†　麗澤大学経済学部教授

れていない。

そこで本章では動学的最適化の観点から、非流動性資産としての不動産を含むポートフォリオ構築の問題を「複数期間・多段階意思決定モデル」として定式化し、その有用性を確かめることを目的とする。

2.　長期ポートフォリオ分析の先行研究における非流動性の取り扱い

⑴　基本形としてのリスク調整済みリターン式

不動産の非流動性を考慮して長期ポートフォリオ選択のモデル化を扱った重要な先行研究として、Cheng, Lin, and Liuの一連の研究がある[1)]。一般に流動性の低い資産（売却に時間がかかる資産など）では、ポートフォリオ内で資産の再配分を行う際に、安易に組み替えをすることが難しい。さらに不動産の購入売却を行う際に発生する取引費用（不動産仲介手数料、収入印紙税、登記簿手数料など）は、伝統的資産（株や債券など）と比較しても高いことが指摘されており、再配分時の「ペナルティ」となりうる。

Chengらがこれらの要因をどのようにモデル化しているか、ここではCheng *et al.*（2013）の研究を中心に整理し、本稿の目指す論点を明確にする。なお以下では同文献どおりの論述展開ではなく説明の順序を変えている。また数式表記も誤解がない限り簡略化したり補ったりしている。

1期間のポートフォリオ選択の標準的な平均分散モデルは、「分散制約（σ^2＝一定）の下でポートフォリオ・リターンを最大化せよ」と定式化できる。

$$L=\boldsymbol{w}'\boldsymbol{R}-\lambda(\boldsymbol{w}'V\boldsymbol{w}-\sigma^2)\rightarrow\max_{\boldsymbol{w}}\quad \text{s.t. } \boldsymbol{w}'\mathbf{1}=1 \tag{2. 1}$$

L：ラグランジェ関数、$\boldsymbol{w}$：原資産のウェイトベクトル、$\boldsymbol{R}$：原資産の期待リターンベクトル、V：原資産の分散共分散行列、σ^2：ポートフォリオの分散制約（一定）、λ：ラグランジェ乗数、$\mathbf{1}$：成分1のベクトル

このとき最適解$\boldsymbol{w}^*$とともに求められるλは、分散制約σ^2を1単位増大させたときの、ポートフォリオの最大化リターンL^*の増分を表す。つまり$\lambda=\partial L^*/\partial\sigma^2$である。これは、1単位のリスクがポートフォリオ・リターンのどれだけに当たるかを表すリスク回避係数である。これを用いると上の最大化問題は、ポートフォリオのリスク調整済みリターンR^{adj}の最大化問題を解くことと同じになる。

$$R^{adj}=\boldsymbol{w}'\boldsymbol{R}-\lambda\boldsymbol{w}'V\boldsymbol{w}\rightarrow\max_{\boldsymbol{w}}\quad \text{s.t. } \boldsymbol{w}'\mathbf{1}=1 \tag{2. 2}$$

以下この定式化を用いて非流動性要因のモデル化を論ずることにする。原資産には、2つのリスク資産（不動産と金融資産）と1つの無リスク資産を取り上げる。不動産と金融資産のウェイトをw_R、w_L、1期当たりの期待リターンをu_R、u_L、1期当たりのリターンの分散をσ_R^2、σ_L^2とする。無リスク資産の1期当たりリターンをr_f、ウェイトをw_f（$=1-w_R-w_L$）とする。なお簡単のため不動産と金融資産のリターンの共分散はゼロだと仮定する。すると1期

1）　Cheng, P., Z. Lin, and Y. Liu (2008), (2010a), (2010b), (2012), (2013), Lin, Z. and Y. Liu (2008)

間の平均分散モデルは次のように定式化できる。これが基本形である。

$$R^{adj}=w_R u_R+w_L u_L+w_f r_f-\lambda(w_R{}^2\sigma_R{}^2+w_L{}^2\sigma_L{}^2)\rightarrow \max_{w_R,\, w_L} \tag{2. 3}$$

(2) non-i.i.d. 特性による期間依存性

これをT期間モデルに拡張し、第 1 の論点である「不動産のリターンのnon-i.i.d. 特性による期間依存性」について論ずることにしよう。いますべての資産をT期間保有するとし、このときのポートフォリオのリスク調整済みリターンをR_T^{adj}と表す。このときT期間モデルは、上の（2. 3）式の右辺の期待リターンと分散とをT期間の添字を付けたものに置き換えて同様の形で表すことができる。

$$R_T^{adj}=w_R u_{T,R}+w_L u_{T,L}+w_f r_{T,f}-\lambda(w_R{}^2\sigma_{T,R}^2+w_L{}^2\sigma_{T,L}^2)\rightarrow \max_{w_R,\, w_L} \tag{2. 4}$$

$u_{T,R}$ 、$\sigma_{T,R}^2$ は、不動産をT期間保有したときのリターン$\tilde{u}_{T,R}$（確率変数）の期待値と分散である。同様に$u_{T,L}$ 、$\sigma_{T,L}^2$ は、金融資産をT期間保有したときのリターン$\tilde{u}_{T,L}$（確率変数）の期待値と分散である。無リスク資産をT期間保有したときのリターンは$r_{T,f}$（確定値）である。これらはそれぞれの資産の1 期間当りの期待リターンと分散を用いて次のように表すことができる。

$$u_{T,R}=E[\tilde{u}_{T,R}]=Tu_R \quad (2.\ 5a) \qquad \sigma_{T,R}^2=Var(\tilde{u}_{T,R})=T^2\sigma_R{}^2 \quad (2.\ 5b)$$

$$u_{T,L}=E[\tilde{u}_{T,L}]=Tu_L \quad (2.\ 5c) \qquad \sigma_{T,L}^2=Var(\tilde{u}_{T,L})=T\sigma_L{}^2 \quad (2.\ 5d)$$

$$r_{T,f}=Tr_f \quad (2.\ 5e)$$

ここで注目すべきは、金融資産のT期間リターンの分散$Var(\tilde{u}_{T,L})$ が$T\sigma_L{}^2$となるのに対し、不動産のT期間リターンの分散$Var(\tilde{u}_{T,R})$はそうはならず$T^2\sigma_R{}^2$となる点である。この背後には、金融資産の 1 期当たりリターン$\tilde{u}_L$（確率変数）はi.i.d.過程にしたがうが、不動産の1 期当たりリターン$\tilde{u}_R$（確率変数）はi.i.d.過程にしたがわないという事実がある。

$$\tilde{u}_R \sim non-i.i.d. \quad (2.\ 6a) \qquad \tilde{u}_L \sim i.i.d. \quad (2.\ 6b)$$

Cheng *et al.*（2010）はこの事実を実証し、統計的な観察によって$Var(\tilde{u}_{T,L})\fallingdotseq T\sigma_L{}^2$、$Var(\tilde{u}_{T,R})\fallingdotseq T^2\sigma_R{}^2$ となることを見出した。つまり不動産は保有期間の2乗の速さで分散が増大するわけである。さて、これらを上の（2. 4）式に代入して両辺をTで除して1 期間当りのポートフォリオのリスク調整済みリターンに直してみよう。

$$R_T^{adj}/T=w_R u_R+w_L u_L+w_f r_f-\lambda(w_R{}^2T\sigma_R{}^2+w_L{}^2\sigma_L{}^2)\rightarrow \max_{w_R,\, w_L,\, T} \tag{2. 7}$$

右辺には保有期間 T が残るため、問題を解くにはウェイトw_R 、w_Lとともに保有期間 T についても同時に解いてやらねばならないことになる。これが 1 期間の平均分散モデルと決定的に異なる点である。このように、「不動産のリターンの分散が保有期間の 2 乗に比例して増大し、不動産のポートフォリオの解が保有期間に依存すること」をCheng *et al.* は期間依存性

（holding-period dependence）と呼んだ。

⑶　市場滞留時間

さらに拡張して第2の論点である市場滞留時間のモデル化について論ずることにしよう。不動産をT期間保有して売却するとしても、売りに出した時点Tからさらに$\tilde{t}$（確率変数）だけ時間がかかるとする。この$\tilde{t}$を市場滞留時間（time-on-market: TOM）という。すると実際の保有期間は$T+\tilde{t}$となるから、上のR_T^{adj}のモデルのTを$T+\tilde{t}$に替えて、$T+\tilde{t}$期間保有のポートフォリオのリスク調整済みリターン$R_{T+\tilde{t}}^{adj}$は次のように表される。

$$R_{T+\tilde{t}}^{adj}=w_R u_{T+\tilde{t},R}+w_L u_{T+\tilde{t},L}+w_f r_{T+\tilde{t},f}-\lambda({w_R}^2\sigma_{T+\tilde{t},R}^2+{w_L}^2\sigma_{T+\tilde{t},L}^2)\rightarrow\max_{w_R,\,w_L} \tag{2. 8}$$

問題は、ポートフォリオを$T+\tilde{t}$期間保有したときの不動産のリターン$\tilde{u}_{T+\tilde{t},R}$（確率変数）の期待値と分散$u_{T+\tilde{t},R}$、$\sigma_{T+\tilde{t},R}^2$および金融資産のリターン$\tilde{u}_{T+\tilde{t},L}$（確率変数）の期待値と分散$u_{T+\tilde{t},L}$、$\sigma_{T+\tilde{t},L}^2$の評価である。

いま市場滞留時間$\tilde{t}$の期待値と分散をt_{TOM}、σ_{TOM}^2とする。まず金融資産については、1期当たりリターン$\tilde{u}_L$がi.i.d.過程にしたがうから次が言える。

$$u_{T+\tilde{t},L}=E[\tilde{u}_{T+\tilde{t},L}]=(T+t_{TOM})u_L \tag{2. 9a}$$
$$\sigma_{T+\tilde{t},L}^2=Var(\tilde{u}_{T+\tilde{t},L})=(T+t_{TOM})\sigma_L{}^2 \tag{2. 9b}$$

無リスク資産については

$$r_{T+\tilde{t},f}=E[(T+\tilde{t})r_f]=(T+t_{TOM})r_f \tag{2. 9c}$$

である。一方不動産については、1期当たりリターン$\tilde{u}_R$はi.i.d.過程にしたがわないので評価には工夫が必要である。期待値の評価には“the Law of Iterated Expectation”、分散の評価には“the Law of Conditional Variance”を用いて次のように導くことができる。

$$u_{T+\tilde{t},R}=E[\tilde{u}_{T+\tilde{t},R}]=E_t[E_u[\tilde{u}_{T+\tilde{t},R}\mid\tilde{t}]]=E_t[(T+\tilde{t})u_R]=(T+t_{TOM})u_R \tag{2. 9d}$$
$$\begin{aligned}\sigma_{T+\tilde{t},R}^2&=Var(\tilde{u}_{T+\tilde{t},R})=E_t[Var(\tilde{u}_{T+\tilde{t},R}\mid\tilde{t})]+Var(E_u[\tilde{u}_{T+\tilde{t},R}\mid\tilde{t}])\\&=(T+t_{TOM})^2\sigma_R{}^2+(\sigma_R{}^2+u_R{}^2)\sigma_{TOM}^2\end{aligned} \tag{2. 9e}$$

分散$\sigma_{T+\tilde{t},R}^2$には、収益リスク$\sigma_R{}^2$だけでなく、非流動性リスク（t_{TOM}、σ_{TOM}^2）が含まれていることが特徴である。これによりリスク調整済みリターンを評価する過程に非流動性リスクを組み込むことができる。

さて、これらを上の式に代入して両辺を$T+t_{TOM}$で除して1期間当りのポートフォリオのリスク調整済みリターンに直してみよう。

$$\begin{aligned}R_{T+\tilde{t}}^{adj}/(T+t_{TOM})&=w_R u_R+w_L u_L+w_f r_f\\&-\lambda\left\{{w_R}^2\left[(T+t_{TOM})\sigma_R{}^2+\frac{\sigma_{TOM}^2}{T+t_{TOM}}(\sigma_R{}^2+u_R{}^2)\right]+{w_L}^2\sigma_L{}^2\right\}\rightarrow\max_{w_R,\,w_L,\,T}\end{aligned} \tag{2. 10}$$

これが市場滞留時間を取り込んだときの長期平均分散モデルである。

⑷　取引費用

Cheng *et al.*（2013）のモデルでは売却時に一括して取引費用 C が発生するものとしている。このときリスク調整済みリターンから「$w_R C$」が減じられることになる。市場滞留時間を取り込んだ（2. 8）式の$R^{adj}_{T+\tilde{t}}$ を拡張して、取引費用を取り込んだリスク調整済みリターン$R^{adj}_{T+\tilde{t},C}$ は次のように表される。

$$R^{adj}_{T+\tilde{t},C} = R^{adj}_{T+\tilde{t}} - w_R C \tag{2. 11}$$

両辺を保有期間$T+t_{TOM}$で除して 1 期間当りのポートフォリオのリスク調整済みリターンに直すと次が得られる。

$$\begin{aligned} R^{adj}_{T+\tilde{t},C}/(T+t_{TOM}) &= w_R u_R + w_L u_L + w_f r_f \\ &- \lambda\left\{ {w_R}^2\left[(T+t_{TOM}){\sigma_R}^2 + \frac{\sigma^2_{TOM}}{T+t_{TOM}}({\sigma_R}^2+{u_R}^2)\right] + {w_L}^2{\sigma_L}^2 \right\} - \frac{w_R C}{T+t_{TOM}} \\ &\rightarrow \max_{w_R,\, w_L,\, T} \end{aligned} \tag{2. 12}$$

これが非流動性を考慮した最終的な長期平均分散モデルである。

⑸　パラメータが保有期間にもたらす影響と不動産のウェイトの実証分析

上の（2. 12）式を解いたときの保有期間の最適解 T^*をさらに、取引費用、流動性リスク、収益リスクで偏微分して符号条件を読み取れば、それらのパラメータが保有期間にもたらす影響がわかる。

$$\frac{\partial T^*}{\partial C} > 0 : \quad \text{取引費用が大} \rightarrow T^* \text{は長くなる} \tag{2. 13a}$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial \sigma^2_{TOM}} > 0 : \quad \text{非流動性リスクが大} \rightarrow T^* \text{は長くなる} \tag{2. 13b}$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial \sigma^2_R} < 0 : \quad \text{収益リスクが大} \rightarrow T^* \text{は短くなる} \tag{2. 13c}$$

さらにChengらは実証データにこのモデルを適用して多資産の長期ポートフォリオにおける不動産のウェイトを求めた。結果は従来の調査研究が示すように大きなウェイトではなく、より小さい比率の妥当なものと思われた。

⑹　先行研究のまとめと残された課題

Cheng *et al.*（2013）の研究は、不動産についての「リターンのnon-i.i.d. 特性」、「取引費用の大きさ」、「市場滞留時間（TOM: time on market）」という 3 点に注目しており、論点は次のように要約できる。

①「non-i.i.d. 特性」のため不動産のリターンの分散は保有期間の2乗に比例して大きくな

る。流動性資産のリターンの分散が保有期間に比例するのと対照的である。よって、従来の研究が想定していた以上に不動産保有の収益リスクは大きく、ポートフォリオにおける不動産のウェイトは低いはずである。

② 「取引費用の大きさ」は、短期間に頻度高く不動産を売買することを極度に不利にする。よって不動産はどうしてもある一定期間以上は保有せざるを得ない。一方保有期間が長くなれば取引費用の大きさが収益全体に占める影響は小さくなる。

③ 「TOM」は非流動性そのものである。TOMの平均と分散は、従来の収益リスクの背景にある要因とは異なる2つの新たなリスク要因である。その影響は、リスク調整済みリターンの定式化の中で非流動性プレミアムとして計量することができる。

④ 不動産と流動性資産とからなる長期ポートフォリオを組むとき、全体のリスク調整済みリターンを最大化するように不動産の最適保有期間を決定できる。取引費用とTOMは保有期間を長くする方向に作用し、一方non-i.i.d. 特性は保有期間を短くする方向に作用する。両者の作用が均衡する点で最適保有期間が決まるものである。

彼らのモデルでは、non-i.i.d. 特性が最適保有期間を決定する上で支配的な役割を果たしている。しかしその論理だけだと、相当の長期にわたって不動産を保有する合理性はもはやないことが自明となる。これは妥当だろうか。仮にnon-i.i.d. 特性が顕著でない場合であっても、不動産と流動性資産のそれぞれのリターンの期待値と分散が変化するという予見の下では自ずとリバランスの動機が生ずる。そのときに不動産を売却するとすればその時点が最適保有期間の終わりである。しかし実際には、取引費用とTOMの存在によりそれに即応できないという非流動性リスクがある。要するに、種々の資産のリターンのダイナミクスの下で非流動性を考慮してどのようにポートフォリオを組めばよいかという課題はまだ残されている。彼らが用いたポートフォリオ分析モデルは「複数期間・1段階意思決定モデル」であったが、上に挙げた課題を扱うには、資産保有を切り替える最適時期を決定することのできるより適切なモデルが必要である。

3. 不動産の非流動性を考慮した2資産モデルの概要

3.1 モデルの目的と問題設定

ここでは非流動性資産としての不動産と他の流動性資産とからなる長期のポートフォリオを組むための動学的最適化モデルを構築することを考える。モデルの目的は、第1に投資家が将来時点においていつどれだけの不動産を取得し、いつまで不動産を保有し、いつどれだけの不動産を売却すればよいか、といった問題に答えることで、投資家の長期ポートフォリオ選択における不動産への投資戦略の立案に資する手段を提供することにある。第2にこのことは同時に、上に挙げた先行研究が残した課題である不動産と流動性資産との保有の切り替えのダイナミクスを多段意思決定の下で考えることでもある。そして第3にそれを利用して、長期ポートフォリオ選択における非流動性下での不動産保有の意義を評価し考察することである。

モデルを構築するに当たっての問題設定と前提条件は次のとおりである。

① 1つの不動産資産と1つの流動性資産との2資産の長期ポートフォリオ選択の問題を考えるものとする。現実には多数の流動性資産があるが、不動産の一定量を一定期間保有したとすると、その期間の間は複数の流動性資産についてだけ通常のポートフォリオ選択の

問題として考えればよいことになる。そこで得られる最適ポートフォリオを１つの流動性資産とみなせば、ここで扱う2資産モデルと類似した状況設定になる。無論厳密には同等ではないので、多数の流動性資産とさらに無リスク資産を加えた場合の問題を独自に考えるべきである。ただそのことは多次元の動学的最適化を扱うことになり格段に煩瑣になるので残された課題としたい。

② 将来の投資環境、つまりそれぞれの原資産の対数リターンとその分散の毎期の将来時系列について、投資家は事前に見通しを持っているとする。すなわち何らかの方法で予測情報を持っているとする。

③ 長期ポートフォリオ選択を考える期間を T 期間とする。投資家は保有資産に関するべき型効用関数を持ち、将来の投資環境の予測の下で、最終期 $T+1$ の期首においてその期待効用を最大化させるべく２資産の間での長期ポートフォリオ選択のダイナミクスを考えるものとする。通常の平均･分散モデルを長期の問題に適用しようとすると、それだけでは目的関数の定式化が恣意的なものになりやすい。ここでは期待効用の理論と整合する形で目的関数のプラクティカルな定式化を導出したい。

④ 不動産の非流動性要因として先行研究が大きく取り挙げている３つの要因のうち、ここでは取引費用に着目したモデル化を中心的に扱うこととする。これだけでも不動産の非流動性をとらえる１次的接近としては意義があると考えるからである。

⑤ ２つ目の非流動性要因である市場滞留時間については、動学モデルにおける定式化の論理的な考察までを行うことにする（第６章）。しかし、それを実際に取り込んだモデルの求解は格段に難しくなるので、これは残された課題としたい。

⑥ ３つ目の非流動性要因である不動産資産のリターンのnon−i.i.d.特性は考慮しないことにする。第１の理由は、これを取り込むことは不動産の保有期間をモデル化の段階で限定することになり、不動産の長期保有という解をあらかじめ排除することになりかねないからである。ここではあくまでも不動産と流動性資産との対比において長期ポートフォリオ選択のダイナミクスを考察することとしたい。第２の理由は、non−i.i.d.特性が問題になるのは、不動産資産のリターンの将来の分散を想定する個所であるから、これはむしろ投資家がどのように将来を想定するかという問題だからである。つまりモデルの定式化の問題とは切り離して考えることにしたい。なお、仮に定式化の問題だとした場合に残る問題は第４章4.3節で考察する。

3.2 モデルの概要

あらかじめモデルの概要を表3.1に示す。以下それに沿って概要を述べることにする。議論を要する個所の詳細は次節以降で述べることにする。

⑴ 目的関数の定式化：加法分離型効用への変換と取引費用の影響

① 投資家は最終期 $T+1$ の期首において保有資産の総額Wによる期待効用を最大化するとする。べき型効用関数を仮定して期待効用最大化問題として定式化すると（3.1）式になる。ポートフォリオ全体のリターンが対数正規分布に従うと仮定すると、（3.1）式の問題は

$$\sum_{t=1}^{T}\left(m_t-\frac{\gamma-1}{2}\sigma_t^{\,2}\right)\rightarrow\max_{x_t,} \qquad (4.7)$$

m_t 、σ_t^2 は、ポートフォリオリターンの期待値と分散である。

表3.1　不動産と流動性資産からなる２資産長期ポートフォリオモデル

期待効用最大化

$$E[\,u(W_{T+1})\,]=E\left[\frac{W_{T+1}^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}\right]\to\max_{x_t}(t=1,2,\cdots T) \tag{3.1}$$

W：資産総額（初期値W_0＝100とする）
γ：リスク回避度（$\gamma>1$）

加法分離型効用尺度による上と同値の最大化問題

$$\sum_{t=1}^{T}u_t(Z_t,x_t)=\sum_{t=1}^{T}\left(\boldsymbol{w}_t'E[\boldsymbol{r}_t]+\frac{1}{2}\boldsymbol{w}_t'\boldsymbol{s}_t-\frac{\gamma}{2}\boldsymbol{w}_t'V_t\boldsymbol{w}_t+m_{C,t}\right)\to\max_{x_t} \tag{3.2}$$

$u_t(Z_t,x_t)$：t 期の効用。
$\boldsymbol{w}$：ウェイトベクトル（3.9）式
$\boldsymbol{r}$：原資産の対数リターンベクトル
　$r_R=\log(1+q_R)$、$r_L=\log(1+q_L)$を成分とする
V：分散共分散行列
$\boldsymbol{s}$：原資産の分散ベクトル
$m_{C,t}$：取引費用による資産減少の対数リターン換算値（<0）、（3.12）式

総資産W

$$W_{t+1}=W_{R,t+1}+W_{L,t+1} \tag{3.3}$$

不動産資産W_R、不動産ストックZ、不動産投資量x、不動産価格P

$$W_{R,t+1}=Z_{t+1}P_{t+1} \tag{3.4}$$
$$Z_{t+1}=Z_t+x_t \tag{3.5}$$
$$P_{t+1}=P_t(1+q_{R,t})\qquad q_R\text{：不動産の総合収益率} \tag{3.6}$$

流動性資産W_L

$$W_{L,t+1}=(W_{L,t}-x_tP_t-C)(1+q_{L,t})\qquad q_L\text{：流動性資産の総合収益率} \tag{3.7}$$

不動産投資額・売却額

$$x_tP_t\begin{cases}>0\cdots\text{ 投資額}\\<0\cdots\text{ 売却額}\end{cases} \tag{3.8a}$$

取引費用C

$$C=\begin{cases}\alpha_1x_tP_t+\alpha_0 & \text{：不動産投資のとき}(x_t>0) \quad (3.8)\\ \beta_1(-x_t)P_t+\beta_0 & \text{：不動産売却のとき}(x_t<0) \quad (3.9)\\ 0 & \text{：投資・売却なし}(x_t=0) \quad (3.10)\end{cases}$$

不動産資産配分比率w_R、流動性資産配分比率w_L

$$w_{R,t}=\frac{W_{R,t}+x_tP_t}{W_t-C},\quad w_{L,t}=\frac{W_{L,t}-x_tP_t-C}{W_t-C} \tag{3.11}$$

取引費用による資産減少の対数リターン換算値

$$m_{C,t}=\log\left(1-\frac{C}{W_t}\right)<0 \tag{3.12}$$

を解くことと同値の問題になる（第4章4.1節）。これが加法分離型効用の原型になる。

②　この方がモデルの操作性が増すのでこの形に変換したいが、問題はポートフォリオリターンをどうやって原資産のリターンで表せばよいかという点であった。ここでは、Campbell and Viceira（2002）がやったように伊藤の公式を応用して、ポートフォリオリターンを原資産リターンで近似する式を導いた。これが（3.2）式である（第4章4.2節）。（3.2）式の $u_t(Z_t,x_t)$ は t 期の効用を表している。式の形からすればリスク調整済みリターンである。これは最終的に、不動産ストック Z_t（実物量）と不動産投資 x_t（または売却）との関数になる。

③　取引費用の影響は、毎期の効用 $u_t(Z_t,x_t)$ に次のようにして組み込むことができる。いま t 期首に総資産がW_tだとする。期首にx_t単位の不動産を取得または売却して取引費用Cが発生

するとする（(3.8) 式、(3.9) 式)。これは期首に収益「$-C$」が発生することに等しい。これを総資産W_tの下での対数リターンとして表すと（3.12）式になる。この直後の総資産はW_t-Cになっている。ここからx_t単位の不動産を取得または売却して当期内に総資産を運用して収益（対数リターン$\boldsymbol{r}_t$）を上げるとする。これらを合計して定式化したものが（3.2）式になる。

(2) 操作変数としての不動産投資、状態変数としての不動産ストックと流動性資産

① 最大化を図るための操作変数は、通常のポートフォリオ選択の問題のような資産配分比率そのものではなく、不動産投資量 x_t（実物量）である。というのは、不動産保有量 Z_t（実物量、以下では不動産ストックと称する）が不変であっても個々の原資産のリターンが変われば貨幣単位でみた個々の原資産への配分比率が変わりポートフォリオが変わってくる。つまり資産額ベースでみた配分比率を直接に操作できるわけではなく、不動産については実物量でみた投資量によって最終的に保有資産額を操作することになるからである。よって資産配分比率は不動産投資によって決まる状態変数の扱いである（3.11）式。なお、$x_t<0$ の場合には、不動産の売却を意味するものとする。不動産資産の状態方程式とそれに関連する方程式は（3.4)、(3.5)、(3.6）式に表されている。

② 流動性資産の状態方程式は（3.7）式に表されている。(3.7）式の中の C は、不動産投資を行う場合にはその取得額と取引費用のために流動性資産が使用され減少することを意味している。不動産が売却される場合には売却額相当分（ただし取引費用を除く）が流動性資産に切り替わって増加することになる。

(3) 取引費用の定式化

① 非流動性要因としての取引費用を入れて定式化したのが（3.8)、(3.9）式である。すなわちリバランスを行おうとすると取引費用がかかるので、毎期ごとに即時的なリバランスはできないことになり、ある期間不動産を保有してから、最適な時期にリバランスを行うことになる。(3.8）式は、不動産をx_t（>0）単位取得するときの費用Cを表す。不動産の購入額はx_tP_tである。このときその一定割合α_1の取引費用$\alpha_1x_tP_t$と固定的な取引費用α_0が発生するとする。(3.9）式は、不動産を$-x_t$（>0）単位売却するときの収入Cを表す。不動産の売却による収入額は$-x_tP_t$である。このときその一定割合β_1の取引費用β_1（$-x_t$）P_tと固定的な取引費用β_0が発生するとする。不動産の取得も売却もなければ収入も費用も発生しない（3.10）式。

② 不動産の取得と売却の取引費用のうち取引額に比例的な取引費用$\alpha_1x_tP_t$およびβ_1（$-x_t$）P_tは、不動産投資量または売却量x_tの操作によって変更できるものである。ところが固定費としてのα_0とβ_0とは実物投資量x_tの操作によって変更できるものではなく取引頻度によって決まるという特徴を持っている。不動産の非流動性を決定する取引費用要因のうちこの固定費用要因は特に重要な作用を持っていると考えられる。なぜなら、極めて短期の不動産売買を継続して繰り返すとそれだけで累積的に大きな費用が発生する可能性があるからである。しかもそれは売買の実物量 x_tの大小にかかわらず発生するものである。よってこれは、頻繁な取引を抑制する方向に作用する非流動性要因の1つであると考えられる。常に大規模な不動産の売買（1棟単位でのオフィスビルの売買）を行う投資家であれば資産総額に占めるこの固定費の割合は小さいかもしれない。しかし小規模な売買（1戸単位の住宅の売買）を繰り返す投資家であれば、この費用は無視できないものであろう。

(4) 資産配分比率（ポートフォリオ配分比率）

不動産資産と流動性資産とへの貨幣額ベースでの配分比率 $w_{R,t}$、$w_{L,t}$、つまりポートフォリ

オ配分比率は（3.11）式のようになる。不動産投資または売却があったときの直後の総資産はW_t-Cである。なければ$C=0$だからW_tである。

4.　投資家の期待効用（目的関数）の加法分離型効用への変換

4.1　長期ポートフォリオリターンの加法分離型への変換

投資家の効用関数としてべき型効用関数を仮定し

$$u(W_{T+1})=\frac{W_{T+1}^{1-\gamma}-1}{1-\gamma} \tag{4.1}$$

とする。W_{T+1}は $T+1$ 期の期首のポートフォリオの総資産額である。γ はリスク回避度で $\gamma>1$ である。ポートフォリオの総合収益を R としこの $t+1$ 期と t 期との比 R_{t+1}/R_t を t 期のポートフォリオリターンと呼び $1+q_t$ と表すことにする。いま初期の資産が 1 のとき $T+1$ 期の期首の資産W_{T+1}は、1 期、2 期、･･･、T期のポートフォリオリターンの積として

$$W_{T+1}=(1+q_1)(1+q_2)\cdots(1+q_T) \tag{4.2}$$

と表すことができる。$1+q_t(=y_t$とおく$)$が対数正規分布に従い、その確率密度関数を

$$g(y_t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_t y_t}exp\left(-\frac{(\log y_t-m_t)^2}{2\sigma_t^2}\right) \tag{4.3}$$

とする。これを

$$y_t \sim LN(m_t,\sigma_t^2) \tag{4.4}$$

と表すことにする。すると対数正規分布の積に関する再生性によりW_{T+1}は

$$W_{T+1} \sim LN\left(\sum_{t=1}^{T}m_t,\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^2\right) \tag{4.5}$$

と表される。ただし$1+q_t$は相互に独立であると仮定する。

これをもとに、（3.1）式の最大化問題は次のように展開できる。

$$E\left[\frac{W_{T+1}^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}\right]=\frac{1}{1-\gamma}\left\{exp\left(\tilde{m}(1-\gamma)+\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2(1-\gamma)^2\right)-1\right\} \rightarrow \max_{x_t,} \tag{4.6}$$

ただし

$$\tilde{m}=\sum_{t=1}^{T}m_t,\quad \tilde{\sigma}^2=\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^2$$

よって最終的にこの最大化問題は、次の最大化問題と同値になる。

$$\tilde{m}-\frac{\gamma-1}{2}\tilde{\sigma}^2 \to \max_{x_t,} \quad (4.7)$$

ここで、γはリスク回避度を表し、投資家はリスク回避型（$\gamma>1$）だとする。

この式が表すのは、正確には当初の期待効用そのものではないが、その代りを果たす等価な効用尺度である。第1項のリターンの期待値を、第2項のリスクプレミアムで調整していると解釈できるので、これをリスク調整済みリターンともいう。

改めてこの式をuとおき、ポートフォリオの対数リターン$\log(1+q_t)\to r_{P,t}$、$m_t\to E[r_{P,t}]$、$\sigma_t^2\to Var[r_{P,t}]$と書き改める。添字$p$はポートフォリオを表す。すると、次の加法分離型効用関数が得られる。

$$u=\sum_{t=1}^{T}\left(E[r_{P,t}]-\frac{\gamma-1}{2}Var[r_{P,t}]\right) \quad (4.8)$$

4.2　原資産リターンによるポートフォリオリターンの近似

ポートフォリオのリターンは、原資産のリターンの加重平均である。しかし、原資産のリターンが対数正規分布に従うと仮定した場合、その加重平均に再生性はないためポートフォリオのリターンの確率密度関数を原資産のリターンの確率密度関数に基づいて明示的に求めることは困難である。前節ではポートフォリオリターンが対数正規分布に従うことを仮定して加法分離型効用関数を導いたが、このままでは論理的に整合しないことになる。そこで、ポートフォリオの対数リターン$r_{P,t}$を、原資産の対数リターンで近似することを考える。これは、Campbell and Viceira（2002）が提示した方法を援用したものである。彼らの方法はもともとは、連続時間の確率過程における伊藤の公式の考え方を離散時間にも応用したものである。詳細は以下のとおりである。

原資産の価格を$X_{i,t}$、収益率を$q_{i,t}$、対数リターンを$r_{i,t}$とする。

$$r_{i,t}=\log(1+q_{i,t})=\log\left(\frac{X_{i,t+1}}{X_{i,t}}\right)=\log X_{i,t+1}-\log X_{i,t} \quad (4.9)$$

ポートフォリオの収益率を$q_{P,t}$、対数リターンを$r_{P,t}$、ウェイトをw_iとする。以下、時間の添え字tを略する。

$$r_P=\log(1+q_P)=\log(\sum_i w_i(1+q_i))=\log(\sum_i w_i e^{r_i})\ (=f(\boldsymbol{r})\text{とおく}) \quad (4.10)$$

ここで、$\boldsymbol{r}'=(r_1,r_2,\cdots,r_n)$は原資産の対数リターンベクトルである。

$\boldsymbol{r}=0$のまわりでTaylor展開して2次の近似式を求める。

$$r_P=f(\boldsymbol{r})=f(0)+\left(r_1\frac{\partial}{\partial r_1}+\cdots+r_n\frac{\partial}{\partial r_n}\right)f(0)+\frac{1}{2}\left(r_1\frac{\partial}{\partial r_1}+\cdots+r_n\frac{\partial}{\partial r_n}\right)^2 f(0)$$
$$+o(|\boldsymbol{r}|^2) \quad (4.11)$$

ここで主な個所を計算して

$$f(0)=\log(\sum_i w_i e^0)=0 \tag{4.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial r_i}f(0)=\left.\frac{w_i e^{r_i}}{\sum_k w_k e^{r_k}}\right|_{r_i=r_k=0}=w_i \tag{4.13}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial {r_i}^2}f(0)=\left.\frac{w_i e^{r_i}(\sum_k w_k e^{r_k})-(w_i e^{r_i})^2}{(\sum_k w_k e^{r_k})^2}\right|_{r_i=r_k=0}=w_i-{w_i}^2 \tag{4.14}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j}f(0)=\left.\frac{-w_i e^{r_i} w_j e^{r_j}}{(\sum_k w_k e^{r_k})^2}\right|_{r_i=r_j=r_k=0}=-w_i w_j \tag{4.15}$$

だから、近似式は

$$r_P=\boldsymbol{w}'\boldsymbol{r}+\frac{1}{2}\boldsymbol{r}'diag(\boldsymbol{w})\boldsymbol{r}-\frac{1}{2}\boldsymbol{w}'\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}'\boldsymbol{w} \tag{4.16}$$

となる。

さらに、積$r_i r_j$を短い時間間隔の下での微小量と考えて次のように評価する。原資産X_iが幾何ブラウン過程 $dX_i=m_i X_i dt+\sigma_i X_i dB_i$ にしたがうとすれば（B_i は標準ブラウン運動にしたがうとする）

$$r_i=d(\log X_i)=\left(m_i-\frac{1}{2}{\sigma_i}^2\right)dt+\sigma_i dB_i \tag{4.17}$$

だから、$dt=1$とみなして

$${r_i}^2={\sigma_i}^2(dB_i)^2={\sigma_i}^2\,dt={\sigma_i}^2 \tag{4.18}$$
$$r_i r_j=\sigma_i\sigma_j\rho_{ij}dt=\sigma_{ij}dt=\sigma_{ij} \tag{4.19}$$

である。よって先の近似式は次のようになる。

$$r_P=\boldsymbol{w}'\boldsymbol{r}+\frac{1}{2}\boldsymbol{w}'\boldsymbol{s}-\frac{1}{2}\boldsymbol{w}'V\boldsymbol{w} \tag{4.20}$$

ここで、$\boldsymbol{s}'=({\sigma_1}^2,{\sigma_2}^2,\cdots,{\sigma_n}^2)$。$V=(\sigma_{ij})$ $n\times n$の分散共分散行列。$\sigma_{ii}={\sigma_i}^2$。

これを先の加法分離型効用の（4.8）式に代入すれば、原資産リターンで表示した次の加法分離型効用が得られる。

$$u=\sum_{t=1}^{T}\left(\boldsymbol{w}_t'E[\boldsymbol{r}_t]+\frac{1}{2}\boldsymbol{w}_t'\boldsymbol{s}_t-\frac{\gamma}{2}\boldsymbol{w}_t'V_t\boldsymbol{w}_t\right) \tag{4.21}$$

これが当初の最大化問題（3. 1）式に代わる実際の目的関数（3. 2）式である。

4.3　残された課題：期間依存性（non-i.i.d. 特性）のモデル化

先にモデル化の前提条件の個所⑥でも述べたように、このモデルでは先行研究が指摘した不動産のリターンのnon-i.i.d. 特性をモデル化していない。それでは、もしモデル化するとするならば、どこに改善の余地があるだろうか。ここではその点を指摘しておきたい。

第 1 は、ポートフォリオリターン r_P を原資産リターン $\boldsymbol{r}'=(r_1,r_2,\cdots,r_n)$ を用いて近似して表した（4. 20）式である。特にこれを導く過程で用いた（4. 17）式のモデルがポイントになる。これは、通常の金融資産のリターンに仮定される確率過程のモデルでi.i.d. 特性を有している。non-i.i.d. 特性ではない。そしてこのモデルにしたがう資産の単位期間当りのリターンの分散をσ_i^2とすれば、この資産を T 期間保有したときの全期間のリターンの分散は $T\sigma_i^2$ である。Chengらが指摘したように、不動産のT 期間保有のリターンの分散が $T^2\sigma_i^2$ になるようなモデル化にはなっていない。Chengらは全期間を通じてのリターンの分散が $T^2\sigma_i^2$ の形になることを期間依存性と呼んでいる。

第 2 に、もしこの点を改善することができた場合、念のためさかのぼって加法分離型関数（4. 8）式がこれと整合して得られるか確認しておく必要がある。それには（4. 5）式の仮定がポイントになる。つまり毎期のポートフォリオリターンは相互に独立であるとしているが、不動産のリターンにnon-i.i.d. 特性を持ち込んだとき、不動産を含むポートフォリオのリターンがi.i.d. 特性を有するとは言えなくなるかもしれない。

第 3 に、振り出しに戻るが、これがモデルの定式化の問題なのかあるいは将来の不動産のリターンの「分散データ」の想定の問題なのかという点である。過去の統計から不動産のT 期間保有のリターン分散が $T^2\sigma_i^2$ だったとしても、将来もまたそのように想定するのが妥当かという問題である。背後の確率過程が明らかにされれば、投資家はそれをもとに将来を予測し違った定式化で分散データを導き出すかもしれない。

こうして点が考察すべき課題として残されている。

5.　動的計画法によるモデルの解法

動的計画法を用いて 2 資産モデルを解くことにする。解としては、最適政策の下での不動産ストック $\{Z_t\}$（実物量）と非流動性資産 $\{W_{L,t}\}$ の時系列が得られればよい。2 次元の動的計画法のようだが、両者には

$$\text{総資産 } W_t = Z_t P_t + W_{L,t} \qquad (P_t\text{ は不動産価格、与件}) \tag{5. 1}$$

の関係があり（表 3. 1 の（3. 3）式、（3. 4）式より）、総資産の初期値 W_0 を与件として問題を解くので $\{Z_t\}$ が求められればもう一方の $\{W_{L,t}\}$ も求まる。よって実質的には1次元の動的計画法である。ここでは次元が小さいので格子法を用いて解くことにする（鍋島、1968）。

アルゴリズムの概要を図 5. 1 に示す。以下説明を補足するが行頭の数字は、図 5. 1 の行頭の番号に同じである。

図5.1　動的計画法による２資産モデルの解法

\# …… 初期設定と準備をする
1　－将来の投資環境データをセットする
　－対数リターンの期待値時系列 .... $\{m_{R,t}\}$、$\{m_{L,t}\}$
　－対数リターンの分散共分散時系列 ...... $\{\sigma^2_{R,t}\}$、$\{\sigma^2_{L,t}\}$、$\{\sigma_{RL,t}\}$
2　－運用期間における資産の最大値を想定する
　－総資産の最小値・最大値を想定 ...... $\widehat{W}_{min}$、$\widehat{W}_{max}$
　－不動産ストックの最大値を想定 ...... $\widehat{Z}_{max}$
　－流動性資産の最大値を想定 .... $\widehat{W}_{max}$
3　－格子をセットする
　－不動産ストック変量の分割 ...... $\Delta_R=\widehat{Z}_{max}/M$、$\boldsymbol{Z}=\{Z_k \mid Z_k=k\Delta_R,\ k=0,1,2,\cdots,M\}$
　－流動性資産変量の分割 .... $\Delta_L=\widehat{W}_{max}/M$、$\boldsymbol{W}_L=\{W_{L,k} \mid W_{L,k}=k\Delta_L,\ k=0,1,2,\cdots,M\}$
4　$T+1$ 期の実現可能状態集合 $\boldsymbol{F}$をセットする:
　－$\boldsymbol{F}(T+1)=\{\ (Z_i,W_{L,i}) \mid \widehat{W}_{min} \leqq Z_iP_{T+1}+W_{L,i} \leqq \widehat{W}_{max}\ \}\quad i=1,2,\cdots,N_{T+1}$
5　$T+1$ 期の状態評価関数をセットする：$U_{T+1}(\boldsymbol{Z}_{T+1})=0$
\# …… 後ろ向き帰納法で状態評価関数をセットする
6　$t=T,\ T-1,\ T-2,\ \cdots,\ 2,\ 1$ を繰り返す
7　｜1 つの$Z_k \in \boldsymbol{Z}$を取り出す→Z_tとする　（$k=0,1,2,\cdots,M$を繰り返す）
8　｜｜$\boldsymbol{F}$（$t+1$）から1組の$(Z_i,W_{L,i})$を取り出す→Z_{t+1}とする（$i=1,2,\cdots,N_{t+1}$ を繰り返す）
9　｜｜｜（$t+1$）期の状態Z_{t+1}、t期の状態Z_tから不動産投資x_t、流動性資産$W_{L,t}$を逆算する
10　｜｜｜実現可能ならば（流動性資産が適正な範囲であること）
11　｜｜｜｜資産配分ウェイトを計算：............ $w_{R,t}$、$w_{L,t}$
12　｜｜｜｜リスク調整済みリターンを計算：...... $u_t(Z_t,x_t)$
13　｜｜｜｜状態評価関数を計算：................ $U_t(Z_t)=max[\ u_t(Z_t,x_t)+U_{t+1}(Z_{t+1})\ ]$
14　｜｜｜｜$U_t(Z_t)$がこれまでの値より大きいならば
15　｜｜｜｜｜新たな最大値として$U_t(Z_t)$を記憶
16　｜｜｜｜｜t期の実現可能状態集合 $\boldsymbol{F}$（t）に$(Z_t,W_{L,t})$を追加して記憶
17　｜｜｜｜｜次に遷移すべき（$t+1$）期の資産状態$(Z_i,W_{L,i})$を記憶
18　｜｜｜｜終わり
19　｜｜｜終わり
20　｜｜終わり
21　｜終わり
22　｜t期実現可能状態集合$\boldsymbol{F}$（t）ができる
23　終わり
\# …… 初期から終期へ最適政策のパスをたどる
24　$\boldsymbol{F}(1)$の中から初期値を選択する：$(Z_1,W_{L,1})$
25　$t=1,2,\cdots,T$を繰り返す
26　｜$(Z_{t+1},W_{L,t+1})$を選択する、ただし$\left\{(Z_{t+1},W_{L,t+1}) \mid U_t(Z_t)=max[\ u_t(Z_t,x_t)+U_{t+1}(Z_{t+1})]\right\}$
27　終わり
28　最適政策の系列$(Z_1,W_{L,1})$、$(Z_2,W_{L,2})$、…、$(Z_{T+1},W_{L,T+1})$ができる

1

－２資産の対数リターンの将来の期待値、分散、共分散をセットする。

－その他、投資家のリスク回避度、総資産の初期値、などをセットする。

－不動産ストック、非流動性資産の初期値は定めない。自由端扱いである。

2〜3

－与件としての各資産の対数リターンをもとに、総資産、不動産ストック、流動性資産のそれぞれについて運用期間（1 期〜$T+1$ 期まで）の間の最大値と最小値を想定しておく。

－不動産ストックと流動性資産について、それぞれ想定される最大値を M 分割して格子をセットする。以後この格子点の空間に解が求められる。

4〜5

－最終期 $T+1$ 期において、不動産ストックと流動性資産との解の組 $(Z_i,W_{L,i})$ がとり得る

格子点の集合を実現可能状態集合 $\boldsymbol{F}(T+1)$ としてセットする。具体的には、総資産の想定の最小値と最大値の間にくる組合せをすべて列挙して記憶しておく。自由端扱いである。

$$\boldsymbol{F}(T+1)=\{\ (Z_i,W_{L,i})\ \mid\ \hat{W}_{min,\ T+1}\leqq Z_iP_{T+1}+W_{L,i}\leqq\hat{W}_{max,\ T+1}\ \}\quad i=1,2,\cdots,N_{T+1} \tag{5. 2}$$

－t 期に状態 Z_t にあるところから出発して以降最適な政策をとって最終期 $T+1$ に至るまでの効用 $u_t(Z_t,x_t)$ の合計を最大化したものを $U_t(Z_t)$ と表す。これを状態評価関数と呼ぶ。最適性原理によりベルマン方程式

$$U_t(Z_t)=max\left[u_t(Z_t,x_t)+U_{t+1}(Z_{t+1})\right] \tag{5. 3}$$

が得られる。ここで、最終期についてはすべての$\boldsymbol{Z}_{T+1}=\{Z_i\}$について

$$U_{T+1}(\boldsymbol{Z}_{T+1})=0 \tag{5. 4}$$

と設定しておく。

6～23

－最終期 T 期から初期へ向けて後ろ向き帰納法で毎期ごとに状態評価関数 $U_t(Z_t)$ を解いていく。具体的には次のように問題を解く。

－t 期の 1 つの状態 Z_t をとりあげる。この状態 Z_t から次の$t+1$*期に遷移する可能性のある状態 Z_{t+1} の候補は、実現可能状態集合$\boldsymbol{F}$（$t+1$）としてすでに求められている。

－「1 つの状態 Z_t」と「多数の遷移候補Z_{t+1}のうちの 1 つ」との間で、ベルマン方程式（上記）の右辺を計算して 1 つの状態評価値 $U_t(Z_t)$ を求める。

－これを遷移候補のすべての Z_{t+1} について計算し、最大となる状態評価値 $U_t(Z_t)$ と遷移先 Z_{t+1} を、Z_t からの最適パス解として記憶する。

－最適パス解 Z_{t+1} が見つかった状態 Z_t を、t 期の実現可能状態集合 $\boldsymbol{F}(t)$のメンバーに追加する。

－なお上の計算過程で必要となる諸変数の諸量は、表 3. 1 のモデル式を用いて逆算する。

　不動産投資または売却：$x_t=Z_{t+1}-Z_t$　（3. 5）式

　不動産投資（売却）額＋取引費用：C　（3. 8）～（3. 10）式

　流動性資産：$W_{L,t}=W_{L,t+1}/(1+q_{L,t})-C$　（3. 7）式

　ここで、$0\leqq W_{L,t}\leqq\hat{W}_{max}$ となれば、遷移候補Z_{t+1}はZ_tからの遷移が可能であると判定する。

　すべての遷移候補Z_{t+1} について Z_t からの遷移が不可能となれば、状態 Z_t が実現不可能と判定する。

24～28

－総資産の初期値 $W_0\fallingdotseq Z_1P_1+W_{L,1}$ を一定の誤差範囲で満たす組合せ $(Z_1,W_{L,1})$ のうち状態評価値 $U_1(Z_1)$ を最大にするものを見つけて初期値とする。

－最適パス解をたどって最適政策の系列$(Z_1,W_{L,1})$、$(Z_2,W_{L,2})$、…、$(Z_{T+1},W_{L,T+1})$を求める。

6.　市場滞留時間のモデル化に関する考察

いま t 期に不動産を売却することが最適政策であるとする。これは t 期のベルマン方程式、

$$U_t(Z_t)=\max_{x_t}\left[u_t(Z_t,x_t)+U_{t+1}(Z_{t+1})\right] \tag{6.1}$$

の解が、$x_t=x^*(<0)$ であることを意味している。

ここで t 期に確定的に売却できるとは限らず、売却成立の時期は、t 期に売りに出してから市場滞留時間 $\tau\,(=0,1,2,\cdots,\tau_1)$ が経過した時点で確率的に定まるとする。つまり確率 $\phi(\tau)$ で $t+\tau$ 期に売却できるとする。また t 期から $t+\tau_1$ 期までの間には必ず売却が成立するものとする。この $\phi(\tau)$ を売却成立確率、τ_1 を最大市場滞留時間と呼ぶことにする。確率 $\phi(\tau)$ は不動産売買が活発な時期とそうでない時期とで異なった確率分布をすると考えてもよい。その場合には売却成立確率を $\phi_t(\tau)$ 、最大市場滞留時間を $\tau_1(t)$ のように表記するのが正確であろう。しかしいまはそうした違いは考えないで一律の確率分布と最大市場滞留時間とを仮定するだけにする。

$$\text{売却成立確率 } \phi(\tau) \text{ の分布：} \phi(0),\phi(1),\phi(2),\cdots,\phi(\tau_1)\ \left(\sum_{\tau=0}^{\tau_1}\phi(\tau)=1\right) \tag{6.2}$$

すると、t 期に売却が成立するときのベルマン方程式の右辺の期待値は、次のように表される。

$$\left[u_t(Z_t,x^*)+U_{t+1}(Z_t+x^*)\right]\phi(0) \tag{6.3}$$

また、$t+1$ 期に売却が成立するときの同期待値は、次のように表される。

$$\left[u_t(Z_t,0)+u_{t+1}(Z_t,x^*)+U_{t+2}(Z_t+x^*)\right]\phi(1) \tag{6.4}$$

一般に、$t+\tau$ 期に売却が成立するときの同期待値は、次のように表される。

$$\left[\sum_{\eta=0}^{\tau-1}u_{t+\eta}(Z_t,0)+u_{t+\tau}(Z_t,x^*)+U_{t+\tau+1}(Z_t+x^*)\right]\phi(\tau) \tag{6.5}$$

（6.5）式が意味するのは、次のことである。

「t 期に売りに出して、t 期から $t+\tau-1$ 期までは売却が成立しないので不動産ストック Z_t のままでポートフォリオから収益を得て毎期効用 $u_{t+\eta}(Z_t,0)$ を享受する。$t+\tau$ 期に $x^*(<0)$ を売却できるので効用 $u_{t+\tau}(Z_t,x^*)$ を享受する。$t+\tau+1$ 期からは、不動産ストック Z_t+x^* から出発して最終期に至るまで最適政策をとって享受できる効用の合計の最大値 $U_{t+\tau+1}(Z_t+x^*)$ を享受する。これらが確率 $\phi(\tau)$ で生ずる。」

これらすべての期待値を用いて不動産を売却するときの当初のベルマン方程式は次のように書き替えられる。

$$U_t(Z_t)=\max_{x}\left\{\sum_{\tau=0}^{\tau_1}\left[\sum_{\eta=0}^{\tau-1}u_{t+\eta}(Z_t,0)+u_{t+\tau}(Z_t,x)+U_{t+\tau+1}(Z_t+x)\right]\phi(\tau)\right\} \tag{6.6}$$

ここで常に

$$（6.1）式右辺 \geqq （6.6）式右辺 \tag{6.7}$$

が成立する。（6.1）式右辺の値は、市場滞留がなくt期に売却が成立してそれ以後最適政策で最終期までの効用の合計の最大値を享受することを意味する。その値は、市場滞留があるかもしれない（6.6）式右辺の値と等しいかより大きい。値に差があれば、その差は市場滞留時間がもたらす効用の減少である（リスク調整済みリターンでもある）。

さてこうした定式化は、確率動的計画法と呼ばれる。Howard（1960）、Ross（1983）などが参考文献としてある。こうした定式化を通じて市場滞留時間という重要な非流動性要因をモデル化できる可能性があることがわかった。しかしながら本研究の段階は、非流動性を動学的に扱うに当たってのまだ初期の段階であり、一度に多様な非流動性要因を扱うことは動学モデルの特性を捉える上でも得策ではないと考える。ひとまず、取引費用要因を中心に扱ってまとまった分析を行うことを当面の目的とし、市場滞留時間を扱うのは今後の残された課題としたい。

7.　数値データによる２資産ポートフォリオ選択の分析

7.1　仮想的な将来想定の下での分析

まず２資産の対数リターンの期待値と分散共分散についての仮想的な数値データを用いて動的計画法でポートフォリオ問題を解いてみよう。その目的は、第１に先に考案した動的計画法の解法のテストを行うこと、第２に流動性下と非流動性下でのポートフォリオ選択の違いがどのように表れるかを把握すること、第３にそれを通じて不動産保有のあり方について何か含意が得られる可能性があるか見定めることである。

⑴　設定データの内容とねらい

設定した将来データは次のような内容である（図7.1）。

①　向こう20期にわたる将来データである。

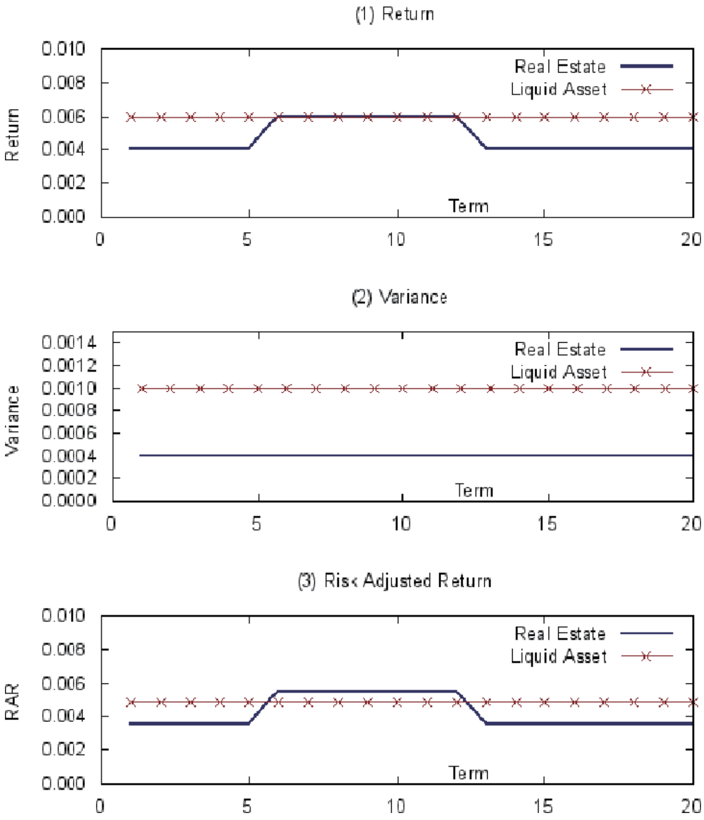
②　流動性資産の対数リターンの期待値は0.006で全期間一定である。また分散は0.0010で全期間一定である。

③　不動産の対数リターンの期待値は、始めの５期間が0.004で一定、次の７期間が0.006で一定、さらに８期間が0.004で一定という１ステップの台形状の増減パターンをとる。一方、分散は0.0004で全期間一定である。

このデータのねらいは、不動産のリターンの台形状増減パターンに対し、取引費用の存在がどのような非流動性の特徴を現わすかを捉えることにある。取引費用は、「２つの資産の間のリスク調整済みリターン（risk-adjusted-return: RAR）の差」と密接な関係がある。RARの差が大きいと、取引費用がある程度大きくても資産保有の切り替え（リバランス）が生ずる。RARの差が小さいと、取引費用がよほど小さくない限りリバランスは生じない。この関係については、次節の実データによる将来想定の個所で詳細に論ずる。

例えば、取引費用のうち固定費用の存在は、リターンの増大分（台形の高さ）が大きいほど、また増大期間（台形の水平長さ）が長いほど固定費の支払いを上回る収益が見込めるので、リターンの動きに順応する流動的な動きからそう大きく逸脱することなく不動産の投資と売却が

図 7.1　２資産についての仮想的な将来データ



なされると考えられる。一方、相対的に固定費が大きければ不動産投資はリターンの動きに反応しない結果になるだろう。

⑵　分析結果

全部で 3 ケースを行った。下の表 7. 2 にそれぞれのケースの取引費用のパラメータの具体的な設定値を示した。併せて分析結果で得られた「不動産保有形態の解」の特徴を示した。すべてリスク回避度$\gamma=3.4$の下で行った。

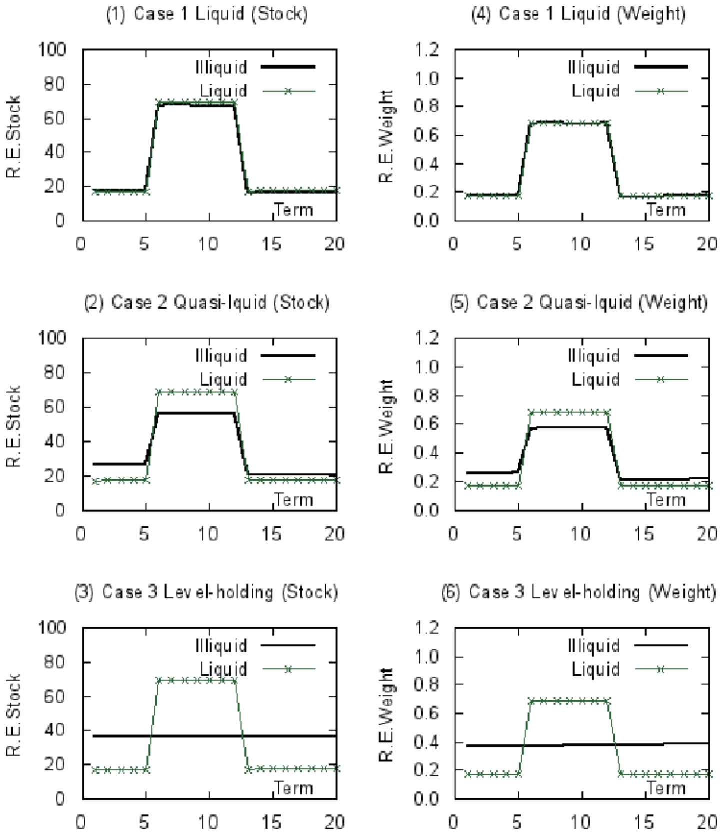
後掲の図 7. 3 には、それぞれのケースについて「不動産ストックの保有解（Stock）」⑴⑵⑶と「不動産資産へのポートフォリオ配分比率（Weight）」⑷⑸⑹とを示した。

表 7.2　仮想データにおける取引費用の設定ケースとシミュレーション結果

ケースNo.	取引費用のパラメータ				不動産保有形態の解 $\gamma=3.4$
	不動産取得時		不動産売却時		
	固定費	比例費	固定費	比例費	
	α_0	α_1	β_0	β_1	
1	0	0. 00	0	0	流動（Liquid）
2	0. 05	0. 0015	0. 05	0. 0015	準流動（Quasi-liquid）
3	0. 05	0. 002	0. 05	0. 002	一定保有（Level-holding）

（注）　固定費と比例費は、表 3. 1（3. 8）式、（3. 9）式のα_0、α_1、β_0、β_1に当たる。

図7.3　２資産ポートフォリオ分析の結果（仮設データによる）



（注）「Illiquid」は動的計画法で解いた非流動性解。「Liquid」は平均・分散モデルで解いた流動性解。

①　まずケース１の取引費用がない場合を見てみよう（図７.３(1)(4)）。図７.３(4)は、不動産へのポートフォリオ配分比率（Weight）のグラフである。「Liquid（流動性下）」とあるのは各期に平均分散モデルを解いて得られた不動産への投資配分比率を折れ線グラフにしたものである。一方、「Illiquid（非流動性下）」とあるのは動的計画法を用いて全期にわたって不動産の投資と売却の最適政策を解いて得られたものを描いている。これは本来、取引費用が存在すれば「流動性下」と「非流動性下」とで異なったグラフ形状を示すものである。しかしこの場合は取引費用がないので、論理的には同じ形状のグラフになるはずである。事実ほぼ同じ形状になっている。全く異なる方法で導いた結果であるにもかかわらずほとんど一致している。つまり動的計画法の解法の正しさがテストされたということでもある。図７.３(1)の不動産ストック（Stock）の図も同様な見方である。ただし、「流動性下」のグラフは、平均分散モデルにより不動産へのポートフォリオ配分比率を求め、それをもとに不動産資産額を求め、それを不動産価格で除することで不動産ストックに直したものである。一方「非流動性下」は動的計画法で解いたものである。両者はほぼ一致している。

②　ケース２は、不動産の取得にも売却にも固定費と比例費がかかるとしたケースである。ただし比例費を小さめに設定したケースである（図７.３(2)(5)）。流動性解に近い解であるが、取引費用が発生した分だけ不動産の取得は小さくなっている。一方、特徴的なのは流動性解と

比べて予め不動産保有比率を高くしておくことが最適であると示唆している点である。これを「準流動性解（Quasi-liquid）」と呼ぶことにする。

③　ケース3は、比例費をより大きく設定したケースである（図7.3(3)(6))。上の解が示唆した「予めの保有」をさらに推し進めて、始めから不動産の保有を多くしてそのまま一定に保持することが最適政策であると告げている。不動産の取得と売却の取引費用の発生を避けているわけである。これは実に興味深い「非流動解」を示している。あたかも不動産の長期一定保有政策を暗示している。これを「一定保有解（Level-holding)」と呼ぶことにする。

このように取引費用の設定の仕方によって、流動性解、準流動性解、一定保有解などバリエーションのある解が得られることがわかる。

7.2　実データを将来想定としたときの最適ポートフォリオ

次に実際の不動産と流動性資産の過去のデータを用いて、それがあたかも将来の想定であるとみなして長期のポートフォリオ問題を解いてみよう。その目的は、仮想データとは異なってはるかにさまざまな変化のケースが含まれているであろう状況下で動的計画法の有効性を検証してみることにある。一方、合目的的なデータの設定ではないので過去のデータが有している特性が濃厚な状況下での限定された分析になる。分析結果を解釈するにはそうした事情を念頭においておかねばならない。

⑴　設定データの内容

使用した実際のデータと、設定した将来想定は次のような内容である。

①　原資産として次の7つを対象とした。大規模株式、中規模株式、小規模株式、社債、国債、J-REIT、不動産である。

②　それぞれについて総合収益指数（2001年12月～2012年12月の月次データ、133期間データ）があり、それをもとに個々の原資産の総合収益率を求めたものがある（対数リターン、132期間データ）。

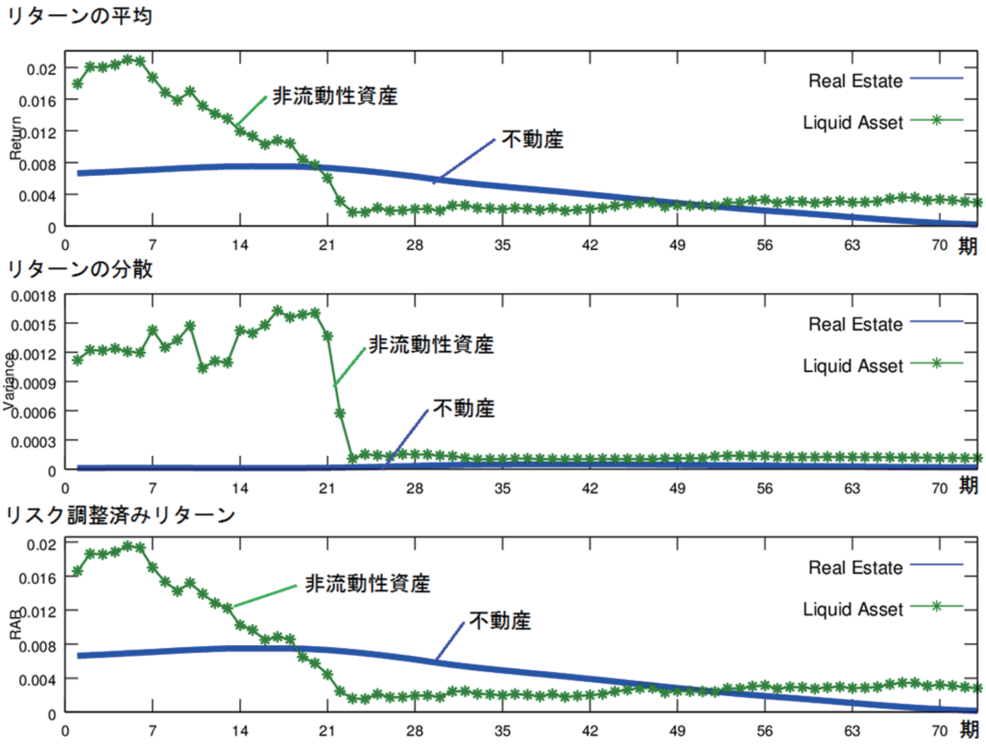
③　本研究が扱う2資産のカテゴリーとの対応については、上の不動産はそのまま本研究での不動産に対応する。また残りの6つの原資産が本研究での流動性資産に当たる。

④　まず不動産の132期間の対数リターンデータについて、1期から60期までのデータを用いて平均と分散を求めた。次いで1期ずらして2期から61期までのデータを用いて同様にした。以下同じように、ウィンドウを60期として初期から末期まで1期ずつずらしながら平均と分散を求めた。こうして73期分の不動産の対数リターンの平均･分散を求めた。これをそのまま将来起こるものという想定とした。

⑤　残りの6つの流動性資産については、同じくウィンドウを60期として132期間全体について1期ずつウィンドウをずらす方法で個々にポートフォリオ分析を行った。つまり特定のリスク回避度を設定して6資産の平均分散モデル（ポートフォリオのリスク調整済みリターン）を最大化する問題を解いて、73期それぞれの最適ポートフォリオのリターンの平均・分散の時系列を求めた。これを本研究における流動性資産の将来起こるデータとして想定した。なおこれらのデータとポートフォリオ分析は、鈴木・高辻（2015a）で扱っているものと同じである。

図7.4に将来の想定をした2資産の平均、分散、リスク調整済みリターン（リスク回避度 $\gamma=3.4$ の下でのケース）の時系列図を示す。73期あるうちの半ばで不動産のリスク調整済みリターンが流動性資産を上回る状態になっており、ここでポートフォリオが不動産保有に切り

図7.4　実データに基づく不動産と流動性資産の対数リターンの平均·分散の将来想定



suz-dp-g034.csv　suz-dp-indat-g034.png

替わることが考えられる。一方その両側の期間では不動産保有がどれだけ評価されるのかという点が関心となろう。以下、次の流れで分析を行った。

- 取引費用の設定に関する考察
- 取引費用のケース設定（全13ケース、リスク回避度$\gamma=3.4$）と解の特徴
- 主要な取引費用ケース（６ケース）におけるリスク回避度別の解の特徴

⑵　取引費用の設定に関する考察

取引費用は本来不動産の取引資料を基に実証的に設定すべきものである。しかしここではむしろ、取引費用の設定によって動的計画法の解がどのようなバリエーションを有するのかを捉えることを目的に分析を行いたい。現実への妥当性はそれらの解の中からあとで考察することにしたい。

取引費用が資産の将来リターンとともに不動産の保有の意思決定に大きく影響することは容易に想像できる。ここでは、動学的最適化の下での厳密な考察というのではなく、分析のためのケース設定に資するようなおおよその考察をするにとどめておきたい。

いまある時点で流動性資産を100％保有しているとする。次期からT期間にわたって、同じく流動性資産を100％保有し続けるか、それとも不動産を100％保有することに切り替えるか、どちらかを選択するものとする。またT期間における、不動産資産のリターンの1期当たりの平均と分散をm_R、$\sigma_R{}^2$とし、同じく流動性資産のそれらをm_L、$\sigma_L{}^2$とする。流動性資産をT期間にわたって保有するときの効用をu_Lとすると、これは（3.2）式において流動性資産のウェ

イトを 1、不動産のウェイトを 0 とすることによって次のように表すことができる。

$$u_L = T\left(m_L - \frac{\gamma - 1}{2}\sigma_L{}^2\right) \tag{7.1}$$

これはリスク調整済みリターンを T 倍したものにほかならない。

一方、100％を不動産に切り替えるとすると取引費用が発生するので（3. 12）式の「$m_{C,t}$：取引費用による資産減少の対数リターン換算値（<0)」が加わることを考慮しなければならない。いま（3. 12）式を近似して

$$m_{C,t} = \log\left(1 - \frac{C}{W}\right) \fallingdotseq -\frac{C}{W} = -\left(\alpha_1 + \frac{\alpha_0}{W}\right) \tag{7.2}$$

と表すことにする。ここで（3. 8）式を用いた。また $x_t P_t = W$ とみなした。すると、不動産に切り替えて T 期間保有するときの効用 u_R は取引費用を考慮して次のように表される。

$$u_R = T\left(m_R - \frac{\gamma - 1}{2}\sigma_R{}^2\right) - \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_0}{W}\right) \tag{7.3}$$

不動産保有に100％切り替える条件は、$u_R > u_L$ が成立することである。よって

$$T\left\{\left(m_R - \frac{\gamma - 1}{2}\sigma_R{}^2\right) - \left(m_L - \frac{\gamma - 1}{2}\sigma_L{}^2\right)\right\} > \alpha_1 + \frac{\alpha_0}{W} \tag{7.4}$$

が成立すればよい。すなわち、

「流動性資産から不動産に替えたときのリスク調整済みリターン（RAR）の超過分の T 期間累計」＞「総資産 1 単位当たりに占める取引費用」

となればよい。

さて図 7. 4 によれば、実データをもとに設定した将来想定データではだいたい第21期～第50期の間で不動産のRARが流動性資産のRARを上回っている。またその後の第53期～第73期では流動性資産のRARが不動産のRARを上回っている。そこで、それぞれの期間で上回った分のRARの累計を計算すれば、前者は流動性資産から不動産に替えるための、また後者は不動産から流動性資産に替えるための、取引費用の条件を示すことになる。さてRARの累計は次の表 7. 5 のようになる。

例えば、リスク回避度 $\gamma = 3.4$ のときの「第21期～第50期の不動産のRAR超過分」の累計の値は、0. 082（8. 2％）である（(6. 4）式の左辺に当たる)。よって、例えば不動産取得額の 8％が比例的な取引費用 α_1 で、固定費 α_0 が総資産の0. 1％を占めるというような場合は、「左辺＝8. 2％＞右辺＝8. 1％」となり、かろうじて不動産への切り替えの可能性があることになる。むろんこれは厳密なものではなく 1 つの目安に過ぎない。

表7.5　リスク調整済みリターン（RAR）の超過分――リスク回避度別

		リスク回避度（γ）			
		1.8	2.4	3.4	13.0
第21期～第50期の不動産のRAR超過分	1期当たり	0.0026	0.0027	0.0027	0.0034
	累計	0.0788	0.0800	0.0820	0.1012
第53期～第73期の流動性資産のRAR超過分	1期当たり	0.0020	0.0019	0.0019	0.0014
	累計	0.0412	0.0406	0.0396	0.0298

⑶　取引費用のケース設定と解の特徴

（3-1）　取引費用のないケース

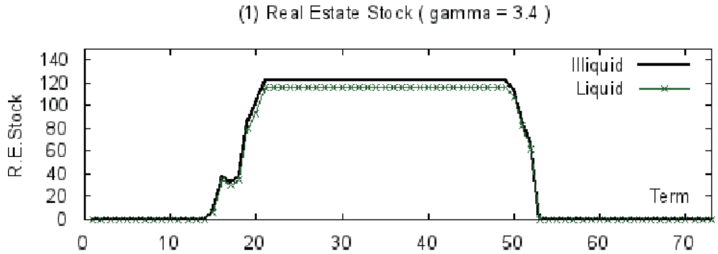
始めに、実データを用いた将来想定データの下における「取引費用のないケース」の流動性解を見ておく。次の図7.6は、不動産ストックと不動産へのポートフォリオ配分比率についての解を図化したものである。平均・分散モデルで毎期解いた流動性解（Liquid）と、動的計画法で解いた非流動性解（Illiquid）とはほぼ一致している。また不動産取得時のグラフの立ち上がりと売却時の降下の様子には、期ごとの漸次的な変化が現れている。この点は、この後の「取引費用のあるケース」における非流動性解との比較のポイントである。

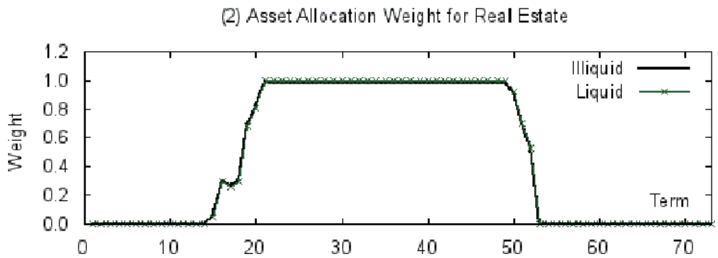
（3-2）　取引費用のあるケース――動的計画法の解の特徴

取引費用がある場合については、リスク回避度 $\gamma=3.4$ の下で13通りのケースを設定した（表7.7）。それぞれのケースについて動的計画法を実行して2資産の最適ポートフォリオを分析した。

これら全ケースの結果をみる前に、まず1つのケースに着目して動的計画法の解の特徴をとらえておきたい。ここではケース5をみておく。図7.8のグラフ⑴は、不動産ストックの最適解をみたものである。「Illiquid」とある実線が動的計画法で解いた最適解である。「Liquid」とあるのは毎期に平均・分散モデルを適用して流動性解を解いたものであり比較のためのもので

図7.6　取引費用がない場合の２資産モデルの流動性解





（注）「Illiquid」は動的計画法で解いた非流動性解。「Liquid」は平均・分散モデルで解いた流動性解。

表7.7　取引費用の設定ケースと不動産保有形態の解の特徴

ケースNo.	取引費用のパラメータ				不動産保有形態の解 $\gamma=3.4$
	不動産取得時		不動産売却時		
	固定費	比例費	固定費	比例費	
	α_0	α_1	β_0	β_1	
1	0.1	0.02	0	0.002	準流動（quasi-liquid）
2	0.1	0.02	0.1	0.005	準流動（quasi-liquid）
3	0.05	0.05	0.05	0.02	半流動（semi-liquid）
4	0.1	0.05	0.1	0.005	半流動（semi-liquid）
5	0.1	0.05	0.1	0.02	半流動（semi-liquid）
6	0.03	0.07	0.03	0.02	半流動（semi-liquid）
7	1	0.02	1	0.01	半流動（semi-liquid）
8	2	0.02	2	0.01	半流動（semi-liquid）
9	2	0.02	2	0.02	一定保有（level-holding）
10	0.03	0.05	1	0.02	半流動（semi-liquid）
11	0.03	0.05	2	0.02	一定保有（level-holding）
12	0.03	0.07	0.03	0.04	保有ゼロ（no-holding）
13	0.05	0.08	0.05	0.03	保有ゼロ（no-holding）

（注）　固定費と比例費は、表3.1（3.8）式、（3.9）式のα_0、α_1、β_0、β_1に当たる。

ある。解は、第16期に不動産を取得しそれを保有して第52期に売却するのが最適な不動産保有形態だと告げている。グラフ(2)は、それに対応した不動産へのポートフォリオ配分比率である。保有の比率は約50％が最適だと告げている。

グラフ(3)は、目的関数であるところの加法分離型効用（表3.1の（3.2）式）の累積を表している。累積であるから毎期の効用（リスク調整済みリターン：RAR）がプラスである限り非減少曲線になるはずである。しかし、不動産の取得と売却のときに取引費用が発生するためその時点だけ効用がマイナスになる。よってグラフ(3)の第16期と第52期では累積曲線が一旦減少する様子を示している。これは動的計画法の解の特徴で、一旦減少してもその後の累積の増加が十分に減少を補って余りあるものであり、最終期には効用の累積が他の如何なる経路を経るよりも最大になることを見出している。

（3-3）　取引費用のあるケース：全13ケースにみる解の特徴

全13ケースについての分析結果を、不動産ストックの最適保有解に着目して図化したのが図7.9である。また不動産へのポートフォリオ配分比率として図化したのが図7.10である。これらのグラフの形状をもとに全13ケースを分類すると、次の4タイプを見出すことができる。

①　第1は「A. 準流動性解」である。ケース1、2が該当する。流動性解に順応するようなグラフ形状となっている。

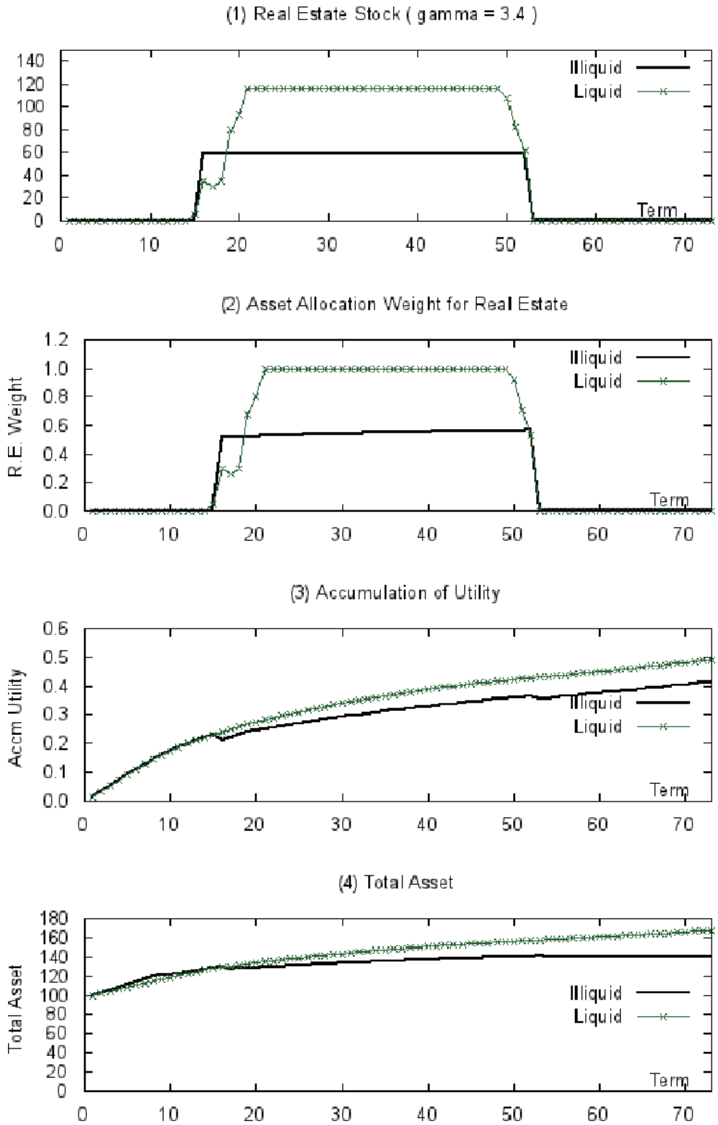
②　第2は「B. 半流動性解」である。ケース3、4、5、6、7、8、10が該当する。不動産の取得と売却の時期はほぼ流動性解と同じだが、不動産の取得量は流動性解ほど大きくはない。また変化は直線的で流動性解のような漸次的変化はない。

③　第3は「C. 一定保有解」である。ケース9、11が該当する。これは全期間を通じて一定の不動産保有量を最適解とするものである。非流動性解の典型的なタイプであろう。

④　第4は、「D. 非保有解」である。ケース12、13が該当する。これは全期間を通じて不動産を保有しないことを最適解とするものである。

不動産保有形態の解のタイプがこのように分かれる背景を取引費用に関連付けて解釈しておきたい。図7.11は、取引費用の設定値によってケース1～13をマッピングしたものである。

図7.8　取引費用がある場合の動的計画法の解の例（ケース5）



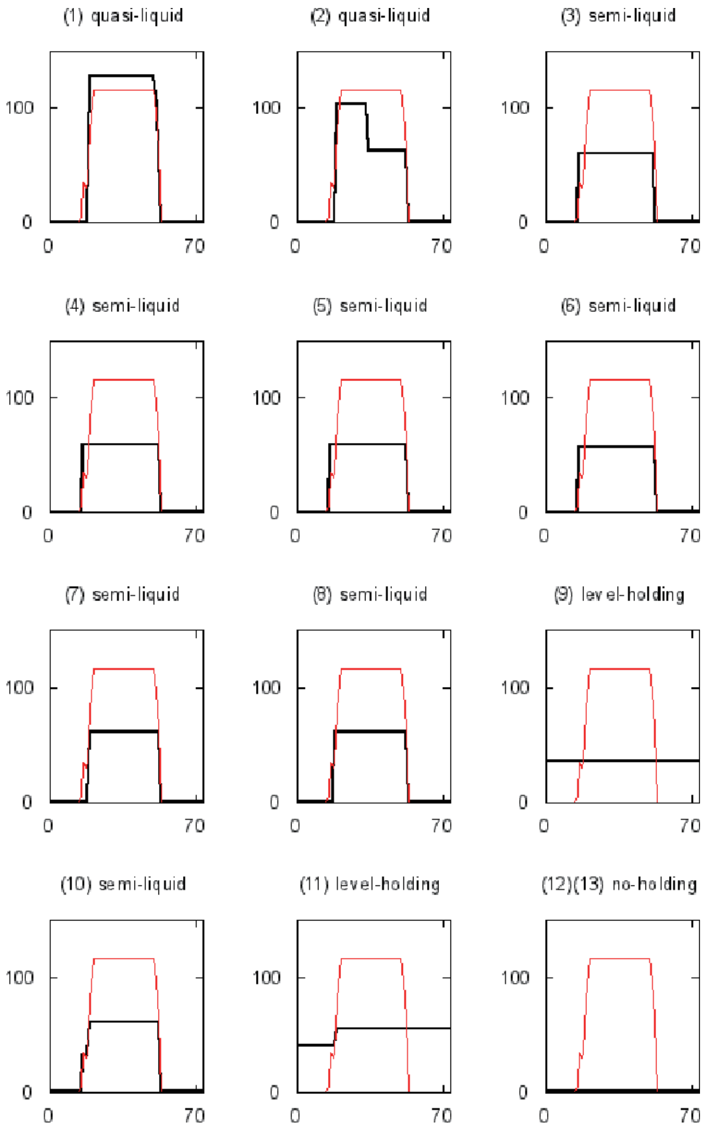
（注）「Illiquid」は動的計画法で解いた非流動性解。「Liquid」は平均・分散モデルで解いた流動性解。

縦軸に不動産取得時の比例費をとり、横軸に売却時の比例費をとっている。固定費はプロットの凡例で区別している（図7.11脚注）。

① 第1の「A. 準流動性解」は、取得・売却のときの比例費も固定費も小さく設定したケースである。取引費用がないケースに近いので当然ながら流動性解に近い解になる。

② 第2の「B. 半流動性解」は、取得・売却のときの比例費をある程度大きく設定したケースである。ただし取得においては「不動産のRAR超過分（表6.1）」を超えないように設定している。このとき解で特徴的なのは、不動産の取得量が流動性解と比較して小さく抑えられるという点である。つまり取得時の比例費は、大きくなると取得量を抑える方

図7.9　不動産ストックの最適保有解（全13ケース、リスク回避度γ＝3.4）

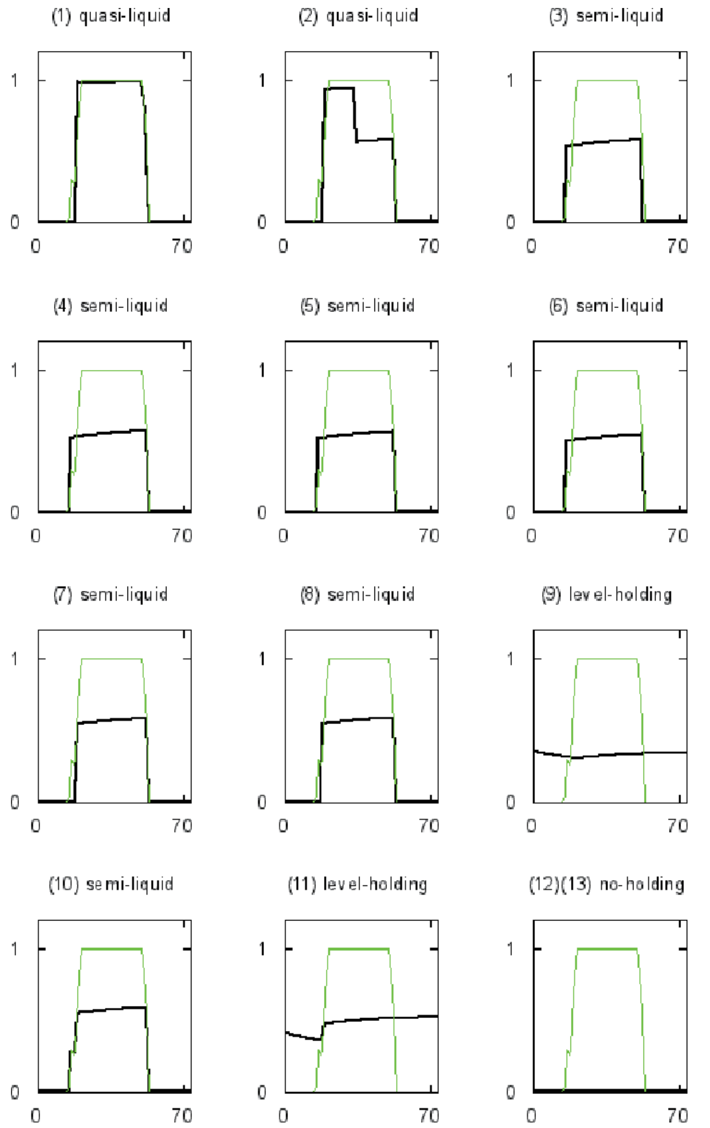


（注）　横軸は１期～73期。縦軸は不動産ストック。"━"は動的計画法で解いた非流動性解。
"―"は平均・分散モデルで解いた流動性解。

向に作用する。一方、売却のときも比例費が売却量を抑える方向に作用すると考えられるが、ここでの比例費は、売却における「流動性資産のRAR超過分（表7.5）」を超えないように設定しているので、取得しただけの量を売却する結果になっている。

③　なお、「B.　半流動性解」のなかでも、ケース７、８は取得時の比例費が小さいにもかかわらず準流動性解とはならず半流動性解になっている。これは取得・売却の固定費を格段に大きく設定したことによると考えられる。一般に、固定費は「売買量の抑制」より「売買頻度の抑制」に効く。毎期売買をすると固定費は確実に「１期当たりのRAR超過分

図7.10　不動産へのポートフォリオ配分比率（全13ケース、リスク回避度$\gamma=3.4$）

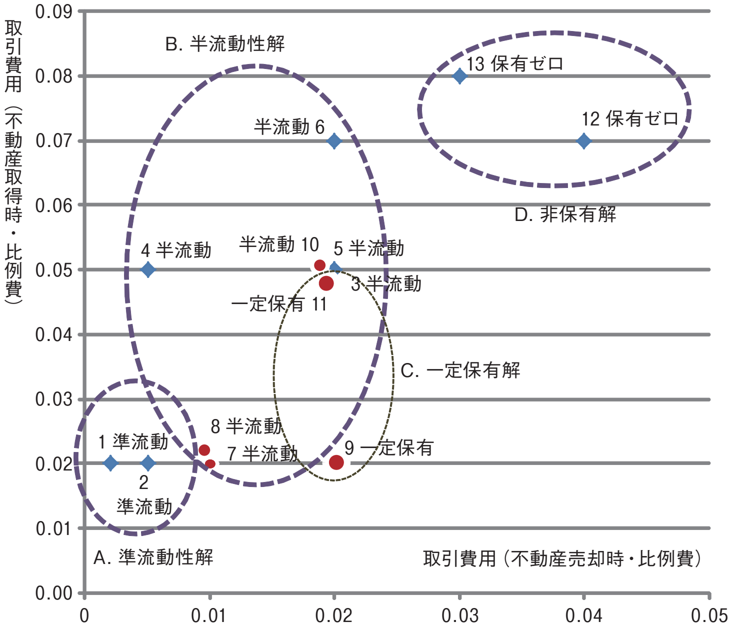


（注）　横軸は１期～73期。縦軸は不動産へのポートフォリオ配分比率。“—”は動的計画法で解いた非流動性解。“—”は平均・分散モデルで解いた流動性解。

（表7.5）」を引き下げることになり売買の効果を減ずることになるからである。しかしここではそれよりも、固定費を大きく設定したことが、不動産保有への切り替え条件（7.4）式の右辺を増大させて取得量の抑制に効いたものと考えられる。

④　第３の「C．一定保有解」は、比例費だけみれば半流動性解の設定と大きく変わるものではない。しかしここでは取得・売却の固定費を大きく設定したことにより、「売買頻度の抑制」効果によって新規取得でなく「あらかじめ保有すること」がうながされ、かつ取得したら「あとは売却しないこと」がうながされた考とえられる。

図 7.11　取引費用の設定ケース別にみた不動産保有形態の解



（注）　1～13の数字はケース番号。◆は売却・取得時の固定費が小さいもの、●は大きいもの。

⑤　第 4 の「D.　非保有解」は、取得・売却の比例費を大きく設定したものである。特に不動産の取得側で比例費が大きいことは、そもそも取得してもRAR超過分が期待できないことを意味し、取得しない意思決定につながると考えられる。

以上はリスク回避度 $\gamma=3.4$ における分析結果であった。次の関心は、他のリスク回避度の下ではどのような解のタイプになるかという点である。先の表 7. 5 に見るようにRAR超過分はリスク回避度によって異なるからである。

⑷　主要な取引費用ケースにおけるリスク回避度別の解の特徴

「A.　準流動性解」、「B.　半流動性解」、「C.　一定保有解」、「D.　非保有解」のそれぞれから、1 つまたは 2 つのケースを選んで、それらのケースについてさらにリスク回避度を変えて分析を行った。選択したケースは全部で6ケースである。概要を次の表 7. 12 に示す。またケース別かつリスク回避度別に不動産ストックとポートフォリオ配分比率の最適解をグラフ化したものを付図 1～6 に挙げた。

投資家のリスク回避度γ（表 3. 1 の（3. 1）式と（3. 2）式）を$\gamma=1.8$、2. 4、3. 4、13. 0と設定しこの 4 ケースごとに分析を行った。この設定は、鈴木・高辻（2015a）におけるリスク回避係数θに整合させている。$\theta=(\gamma-1)/2$の関係にあり、同文献では$\theta=0.4$、0. 70、1. 20、6. 00と設定している。

分析結果から観察される特徴は次のことである。

①　リスク回避度 γが大きくなるにつれ、同じ取引費用の下であっても非流動性の程度の強い不動産保有形態を選択する傾向がある。例えば、ケース 5 では「半流動」→「半一定保有」、またケース9では「半流動」→「半一定保有」→「一定保有」と選択が変わる。これはそもそも流動性解においても、リスク回避度 γが大きくなると、不動産保有の傾向が全期にわたって

表7.12　取引費用の設定ケース別、リスク回避度γ別に見た不動産保有形態の解の特徴

ケースNo.	取引費用のパラメータ[1]				不動産保有形態の解			
	不動産取得時		不動産売却時					
	固定費	比例費	固定費	比例費				
	α_0	α_1	β_0	β_1	$\gamma=1.8$	$\gamma=2.4$	$\gamma=3.4$	$\gamma=13.0$
2	0.1	0.02	0.1	0.005	準流動	準流動	準流動	準流動
5	0.1	0.05	0.1	0.02	半流動	半流動	半流動	半一定保有[2]
9	2	0.02	2	0.02	半流動	半一定保有[3]	一定保有	一定保有
11	0.03	0.05	2	0.02	保有ゼロ	一定保有	一定保有	一定保有
12	0.03	0.07	0.03	0.04	保有ゼロ	保有ゼロ	保有ゼロ	一定保有
13	0.05	0.08	0.05	0.03	保有ゼロ	保有ゼロ	保有ゼロ	一定保有

（注）　1. 固定費と比例費は、表3.1（3.8）式、（3.9）式のα_0、α_1、β_0、β_1に当たる。
2. 初期から保有して後期途中で一部を売却する。付図2。
3. 前期途中に取得して最終期まで保有する。付図3。

強まる様子が見られることと相似である。すなわち、RARで評価したとき

「不動産RAR」－「流動性資産のRAR」

の評価値が高まり、不動産へのポートフォリオ配分比率が高まるからだと考えられる（旧p. 27の（7.2）式右辺第1項の分子）。

② リスク回避度γが小さいときは「非保有解」が選択されていたケースであっても、リスク回避度γが大きくなるにつれ「一定保有解」が選択される傾向がある。例えば、ケース11、12、13である。これも上と同様に不動産への配分の評価が高まるからであろう。

(5) 考　察

① 取引費用の存在はかなり大きく不動産のポートフォリオ選択に効く。つまり非流動性を左右する要因である。比例費は特に不動産の取得量や売却量に抑制的に作用する。固定費は取得や売買の頻度に抑制的に作用する。取引費用パラメータの設定のため、今後は実証的な資料に基づいて検討する必要がある。

② その結果、取引費用の影響が大きくなるにつれ「準流動性解」、「半流動性解」、「一定保有解」、「非保有解」の順に非流動性が高くなるような解が生ずる。

③ 投資家のリスク回避度が大きくなると「一定保有解」または「半一定保有解」のような典型的な非流動性解が選好される。これは『「不動産RAR」－「流動性資産のRAR」』の評価値が高く評価され不動産へのポートフォリオ配分比率が高まるからだと考えられる。

8.　結論と残された課題

「非流動性資産としての不動産」と「流動性資産」という2資産に限定して長期ポートフォリオ選択の方法を考察し試行してきた。これを通じて次のことが言えるであろう。

① 長期ポートフォリオ選択において、取引費用が存在すると、平均・分散モデルによる流動性解とは根本的に異なった非流動性解が存在する可能性がある。すなわち「一定保有解」または「半一定保有解」である。よってその評価のためにはここで用いた動的計画法のような適切な方法論が必要である。長期ポートフォリオ選択を講ずるための動学的最適化の方法として、非流動性を表現することのできる動的計画法の適用は、ひとまず有用なものであると結論付けてよい。

② ただし、不動産を含む長期ポートフォリオ選択について一般的な戦略を語るには、もっと多くの将来想定の下でのシミュレーションを試行してみる必要がある。特に検証したい明確な目的を持った将来想定が必要である。

③ 市場滞留時間をモデル化することは残された課題であるが、それでもベルマン方程式を応用して、次善の解、次々善の解を用いることで定式化の可能性が示された。

④ 不動産のリターンのnon-i.i.d.特性をモデル化することは残された課題であるが、その背景にある確率過程を明らかにし、目的関数を再構成することで本研究の方法論が適用できると考えられる。

⑤ 2資産モデルを超えて多資産の問題に拡張することは実用性の上では重要な課題である。その場合、本研究で用いた格子法では限界がある。他の適切な方法論を探求する必要がある。

引用文献

鈴木英晃・高辻秀興（2013）、不動産投資指数の時系列的変動における特徴、日本不動産学会（一般論文）

鈴木英晃・高辻秀興（2015）、非流動性資産である不動産を含むポートフォリオ選択の分析手法に関する先行研究サーベイ、経済社会総合研究センター、Working Paper No.69

鈴木英晃・高辻秀興（2015a）、ポートフォリオ選択におけるリスク回避度別にみた不動産投資の選好、麗澤経済研究、23巻

鍋島一郎（1968）、動的計画法　数学ライブラリー 7、森北出版、pp.73-75

Campbell and Viceira (2002), Strategic Asset Allocation: Portfolio Choice for Long-Term Investors, Oxford University Press（邦訳：木島正明・野村証券金融経済研究所（2005）、戦略的アセットアロケーション、東洋経済新報社）

Cheng, P., Z. Lin, and Y. Liu (2008), A Model of Time-on-Market and Real Estate Price Under Sequential Search, with Recall, REAL ESTATE ECONOMICS, 2008 V36 4: pp.813-843

Cheng, P., Z. Lin, and Y. Liu (2010a), Illiquidity and Portfolio Risk of Thinly-traded Assets, The Journal of Portfolio Management, 36, pp.126-138

Cheng, P., Z. Lin, and Y. Liu (2010b), Illiquidity, Transaction Cost, and Optimal Holding Period for Real Estate: Theory and Application, http://ssrn.com/abstract=1580134

Cheng, P., Z. Lin, and Y. Liu (2012), Optimal Portfolio Selection: the Role of Illiquidity and Investment Horizon, working paper, http://ssrn.com/

Cheng, P., Z. Lin, and Y. Liu (2013), Is There a Real Estate Allocation Puzzle?, The Journal of Portfolio Management, Special Real Estate Issues 2013, pp.61-74.

Howard, R.A.(1960)、Dynamic programming and markov processes , MIT press（邦訳：関根智明・羽鳥裕久・森俊夫（1971）、ダイナミックプログラミングとマルコフ過程、培風館、p.32）

Lin, Z. and Y. Liu (2008), Real Estate Returns and Risk with Heterogeneous Investors, REAL ESTATE ECONOMICS, 2008 V36 4: pp.753-776

Ross, S. M. (1983), Introduction to Stochastic Dynamic Programming, Academic Press

Summary

Dynamic optimization of real estate investment in the long-term portfolio selection considering illiquidity risk

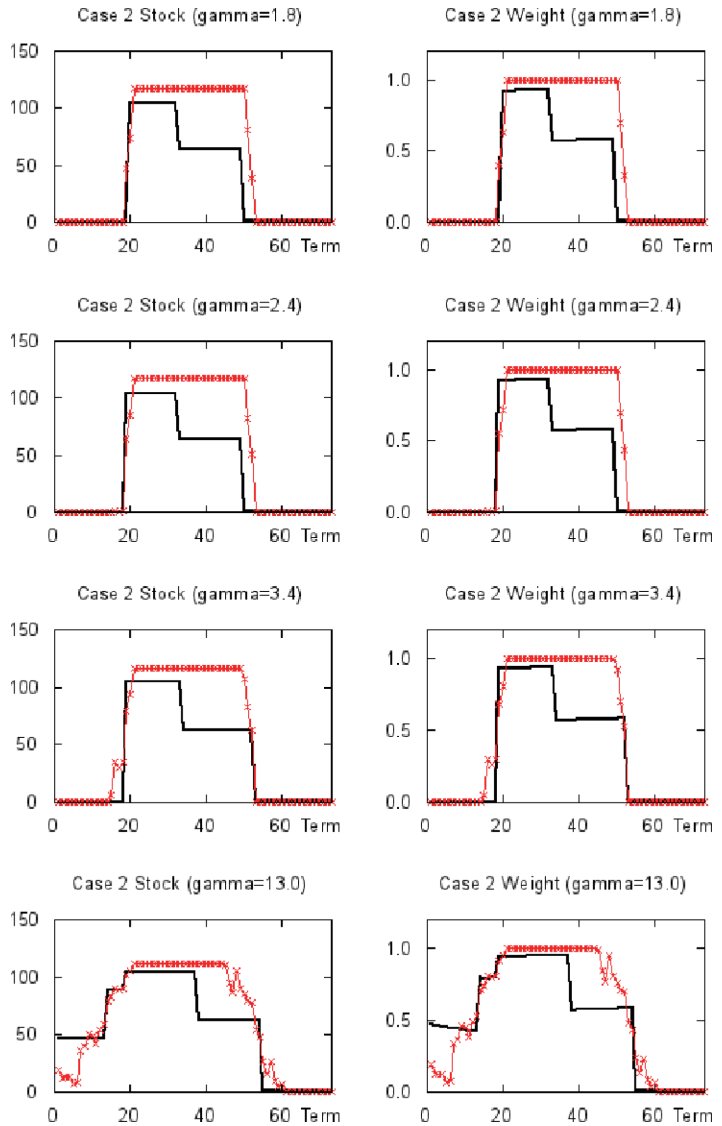
Hideaki Suzuki, Hideoki Takatsuji

Existing studies pointed out that illiquidity of real estate operation in the long-term portfolio selection is caused mainly by three factors: non-i.i.d. characteristics of real estate return, high transaction cost and time-on-market (TOM). This paper explored a method of dynamic optimization of real estate investment in the long-term portfolio selection considering

illiquidity risk especially from a view of high transaction cost. As a result it was found that the method of dynamic programming is useful for such a purpose as flexible simulation of illiquid-characteristic dynamic system, and that level-holding of real estate is the best solution for real estate investment in some instances under the situation of risk-averting-investment. And also the method seems to have potential to incorporate non-i.i.d. characteristics and TOM.

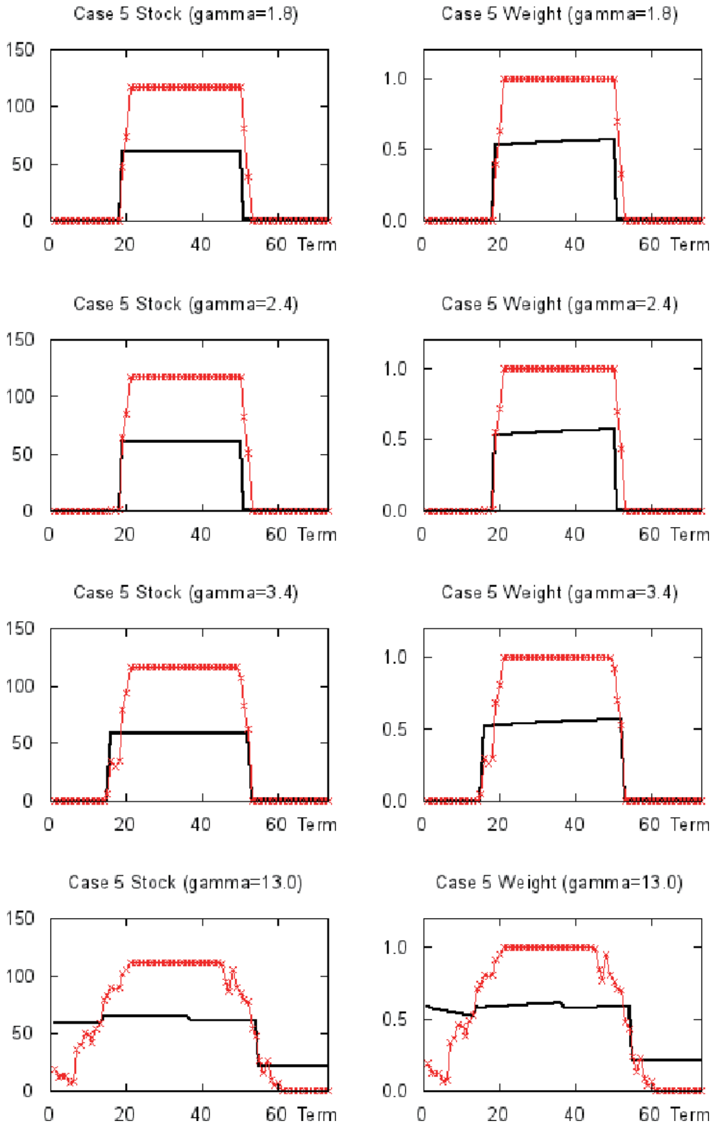
(受付　平成27年 8 月24日
校了　平成27年11月17日)

付図 1　取引費用のケース別、リスク回避度 γ 別に見た不動産保有形態の解の特徴



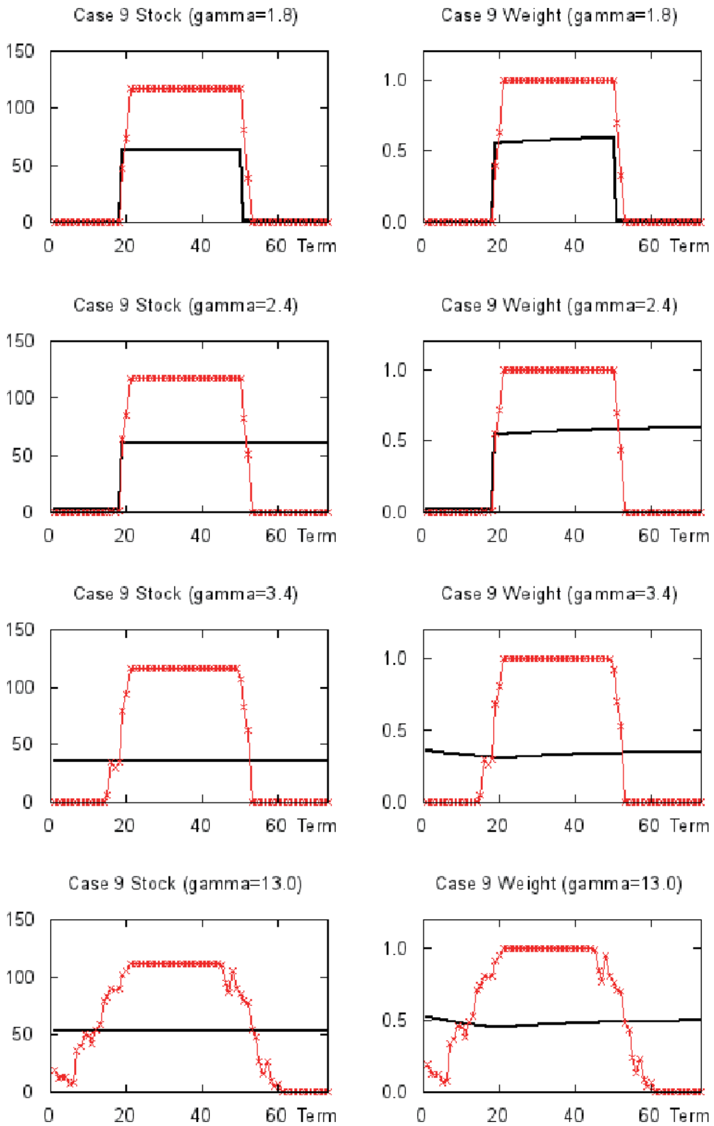
（注）“——”は動的計画法による非流動性解。“—∗—∗—”は平均分散モデルによる流動性解。

付図２　取引費用のケース別、リスク回避度γ別に見た不動産保有形態の解の特徴



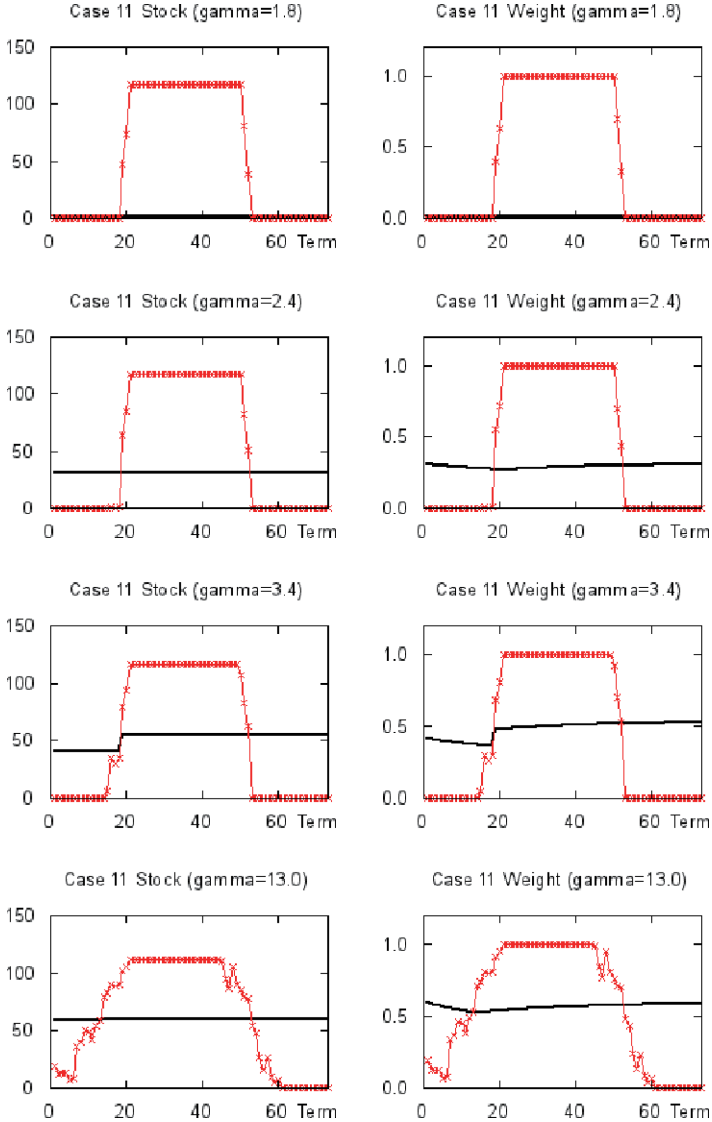
（注）“——”は動的計画法による非流動性解。“—*—*—”は平均分散モデルによる流動性解。

付図３　取引費用のケース別、リスク回避度 γ 別に見た不動産保有形態の解の特徴



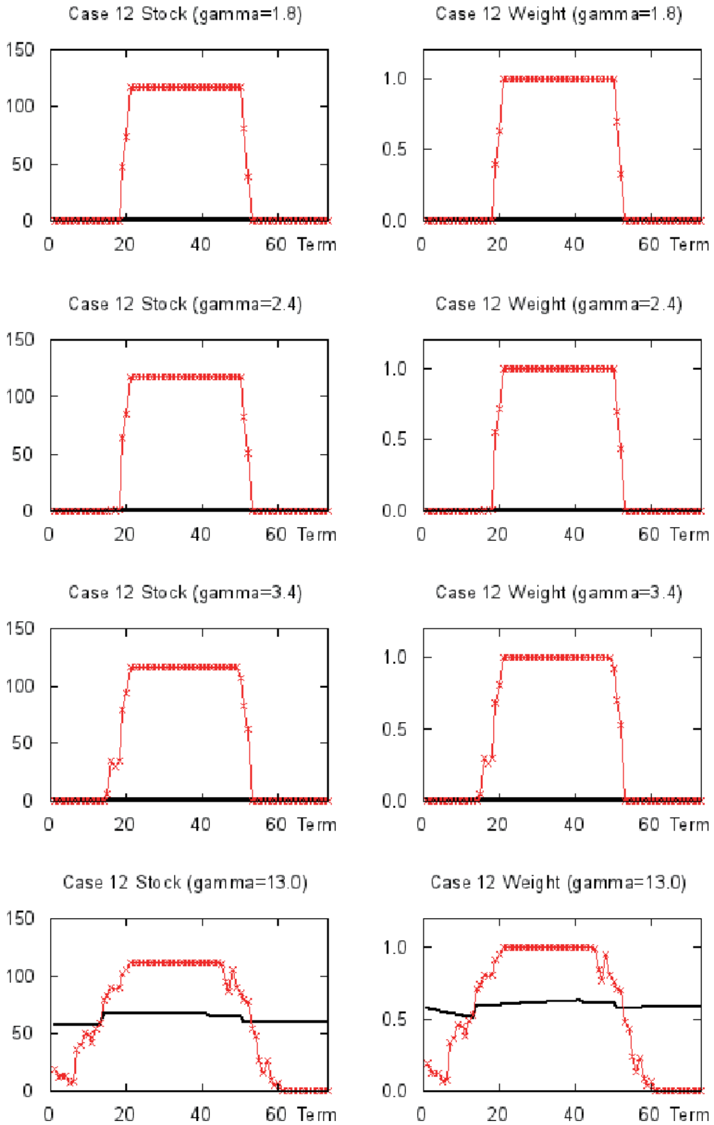
（注）“——“は動的計画法による非流動性解。“—＊—＊—”は平均分散モデルによる流動性解。

付図４　取引費用のケース別、リスク回避度γ別に見た不動産保有形態の解の特徴



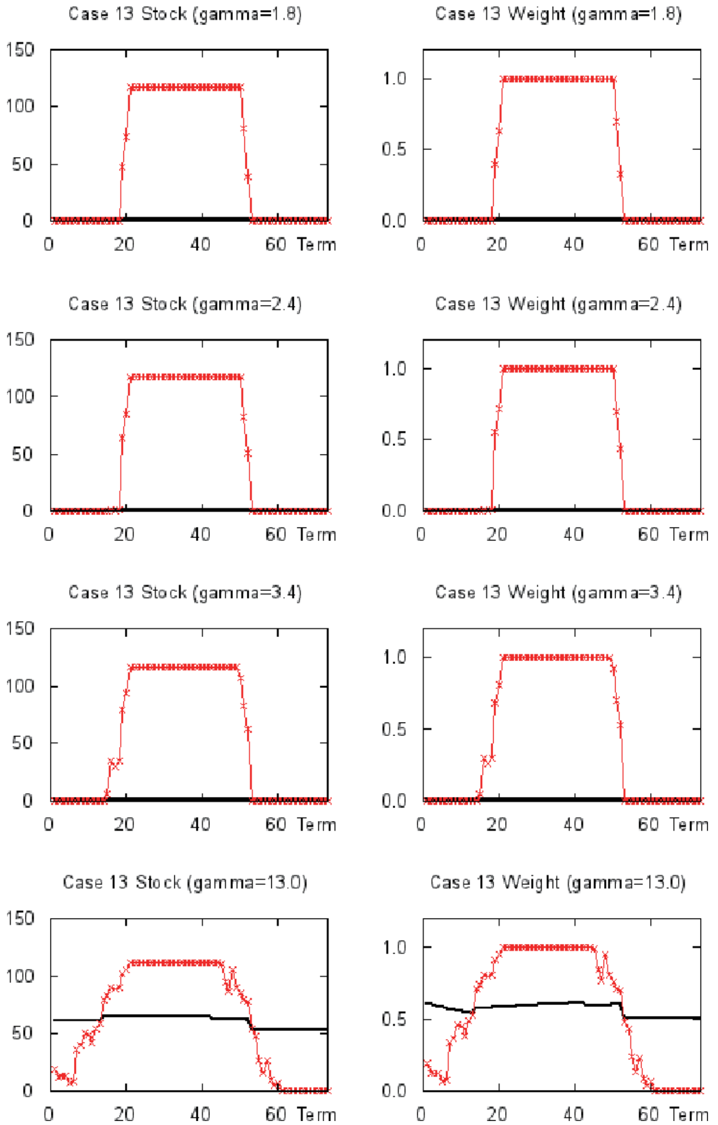
（注） “——”は動的計画法による非流動性解。“—＊—＊—”は平均分散モデルによる流動性解。

付図５　取引費用のケース別、リスク回避度 γ 別に見た不動産保有形態の解の特徴



（注）“——”は動的計画法による非流動性解。“—＊—＊—”は平均分散モデルによる流動性解。

付図６　取引費用のケース別、リスク回避度γ別に見た不動産保有形態の解の特徴



（注）“——”は動的計画法による非流動性解。“—＊—＊—”は平均分散モデルによる流動性解。