RIPESS

経済社会総合研究センター
Working Paper No.7

Real Options 研究の現状

高辻　秀興　　小野　宏哉　　佐久間　裕秋　　籠　義樹

麗澤大学国際経済学部

平成１４年３月３１日

RIPESS 経済社会総合研究センター
麗 澤 大 学
〒277-8686 千葉県柏市光ヶ丘２－１－１
Tel:04-7173-3761 / Fax:04-7173-3767

Reitaku Institute of Political Economics and Social Studies

Real Options 研究の現状

麗澤大学　国際経済学部　教授　高辻　秀興
麗澤大学　国際経済学部　教授　小野　宏哉
麗澤大学　国際経済学部　助教授　佐久間　裕秋
麗澤大学　国際経済学部　講師　籠　義樹

平成 13 年度より、麗澤大学経済社会総合研究センターにおいて、「資産・資源に関する金融工学研究」を研究課題とするプロジェクトが設置された。本プロジェクトは、金融工学分野において培われている知識・技術を、都市計画や環境政策といったより広い分野への応用を企図するもので、その初年度である平成 13 年度は、今日的テーマとして重要なリアル・オプション（Real Options）に関し、その既存研究を概観するとともに、学問的基礎の整理を行った。

本プロジェクトの成果は、平成 14 年 3 月 1 日・12 日・20 日の 3 回の公開研究会において報告され、本 Working Paper はその報告内容に加筆・修正を行ってまとめたものである。リアル・オプション研究の先端では、モデルの精緻化の必要から数学的難解さや複雑さが伴うが、本 Working Paper では基本的な概念や基礎となる数学的知識の整理に的を絞り、リアル・オプションの入り口における案内図とならんことを意識した。未だ不十分な点が多々残されているとは思うが、何かの折に役に立つことがあれば幸甚の至りである。

目次

1．リアル・オプションの概念

1－1　リアル・オプションの定義

近年、事業評価の一手法としてリアル・オプションへの関心が高まっており、わが国でもこれに関連した書物の出版が相次いでいる。最近では、リアル・オプションに関する理論から応用までの主要論文を網羅した論文集 "Real Options and Investment Under Uncertainty" （Schwartz and Trigeorgis Ed.、2001）も刊行され、国際的な関心も高い。

リアル・オプションとは、「あらかじめ定められたコストで、あらかじめ定められた期間に、事業を拡張したり中止したりする権利」（Copeland and Antikarov、2001）、「不確実性の高い事業環境下で経営の持つ選択権」（刈屋・山本、2001）などとされる。経営者あるいは投資家は、将来の事業環境に適合するように、事業のやり方や規模を変更する「権利」、すなわち「オプション」を有する。このオプションの価値を現時点において評価しようとするものがリアル・オプションであり、将来における意思決定の柔軟性の価値を評価する手法と位置づけられる。

事業評価の伝統的な手法としてはDCF（Discount Cash Flow）法があり、その事業が将来生み出すキャッシュ・フローを予測して、それらの現在価値を合計したもの（NPV: Net Present Value）を事業価値とする。DCF法によるNPVは、将来の各期iにおける予測キャッシュ・フローをC_i、各期に対応する割引率をr_iとして、次式(1-1)で定義される。

$$NPV = \sum \frac{C_i}{(1+r_i)^i} \tag{1-1}$$

Myers（1987）は、運営・戦略面で十分な選択肢を有する投資の評価についてはDCF法には本来的限界があり、こうした投資の評価についてはオプション評価が最も有望であることを指摘している。予測するキャッシュ・フローが確定的で、将来新たな情報が得られたり、事業環境が変わったりした場合の変化を考慮しない場合、DCF 法による評価は将来における意思決定の柔軟性を含まないと言える。事業価値は、こうした予測キャッシュ・フローに基づく価値と将来における意思決定の柔軟性からなるとする考えから、Trigeorgis（1996）や刈屋・山本（2001）は、事業価値を拡張NPVとして図1のように定義している。将来は不確実であり、その不確実性が高いほど将来における意思決定の柔軟性の価値は高まるであろうから、古典的なDCF法では事業価値を過小評価する傾向が強くなると考えられる。

図1　拡張NPVの概念
*刈屋・山本（2001）より改変して転載

1－2　リアル・オプションの種類と適用分野

リアル・オプションは当初天然資源開発分野で注目され、その後土地開発、製造業経営における柔軟性、研究開発中心の産業、海外投資などに応用範囲が拡大した。リアル・オプションにも様々な種類があり、これを整理すると表1のようになる。最近では、複合オプションが注目されているが、これは実際のプロジェクトには通常複数のリアル・オプションが含まれるためである。複合オプションの価値は、それを構成する各オプションの価値の総和とは限らず、オプション間に相互作用を考慮しなければならない。

表1　リアル・オプションの種類と適用分野

種類	概要	適用分野
延期オプション Option to defer	土地の使用権、あるいは資源の採掘権を有する者は、開発の結果得られるものの価格が投資に見合うまで、開発を延期することができる。	天然資源開発 不動産開発 農業
段階的投資 Staged Investment	段階的に投資を行う場合、新たに得られた情報が望ましくない場合には、途中で事業を中止するというオプションがある。各段階は、続く段階の複合オプションである。	研究開発 （製薬業など） 長期の開発投資計画 （大規模開発・発電所など） 起業間もないベンチャー
規模の変更 Option to alter operating scale	想定したより市場の状況が良い場合には、事業規模を拡大することができる。逆に良くない場合には縮小することができ、極端な場合には、事業を一時休止するか、最初からやり直すことができる。	天然資源開発 アパレル業界 消費財一般 商業用不動産
中断オプション Option to abandon	市場が激しく低迷した場合、事業を止めて設備などを売却することができる。	設備産業 （航空・鉄道・金融など） 新製品の投入
変更オプション Option to switch	価格や需要が変化した場合、工場の生産内容を変更する。あるいは、他の原料を使用して、同じ生産物を製造する。	Output shifts 家電・おもちゃ・機械部品・自動車など Input shifts 石油・電源・化学物質・農作物など
成長オプション Growth option	初期の投資では、必要最低限なもの、あるいは関係するプロジェクトとの連携に留め、将来成長が見込めたときに、本格的な投資を行う。	ハイテク産業 研究開発 国際取引
複合オプション Multiple interaction option	実際のプロジェクトは、様々なオプションの集合を含んでいる。こうした複合オプションの価値は、各オプションの価値の総和ではない。	上記産業の実際のプロジェクト

* Trigeorgis (1993) から改変して転載

1－3　リアル・オプションに関わる学問領域

リアル・オプションの評価には、金融分野で培われたオプション技術が応用される。例えば、あらかじめ決められた価格で将来のある時点に事業を開始する権利は、コール・オプションに相当するし、事業を売却する権利はプット・オプションに相当する。金融商品に関するオプション取引自体は、古くから需給に基づき行われてきたが、Black and Scholes（1973）と Merton（1973）のオプションの評価とヘッジに関する業績を起点に、数学的精緻化と一般化が急速に進み、他の

分野への応用が可能な明確な理論となった。

オプション理論は、Lamberton and Lapeyre（1997）も指摘するように、確率論を中核として構成されており、金融分野における確率解析の有用性が最も明白な領域である。将来のt時点において、原資産を価格Kで売却できるプット・オプションの価値Pは、原資産のt時点の価格S_tに関する確率密度関数$f(S_t)$を用いて、次式で表すことができる。ただし、rは割引率である。

$$P = e^{-rt}\int_{-\infty}^{K}(K - S_t)f(S_t)dS_t \tag{1-2}$$

確率密度関数$f(S_t)$が図2のように図示できたとすると、このプット・オプションがt時点において利益をもたらすのはS_tがKを下回る領域で、その利益は$K - S_t$である。式(1-2)は、そうした利益が生じる期待値を現在価値に割り戻したものが、プット・オプションの価値であることを意味している。

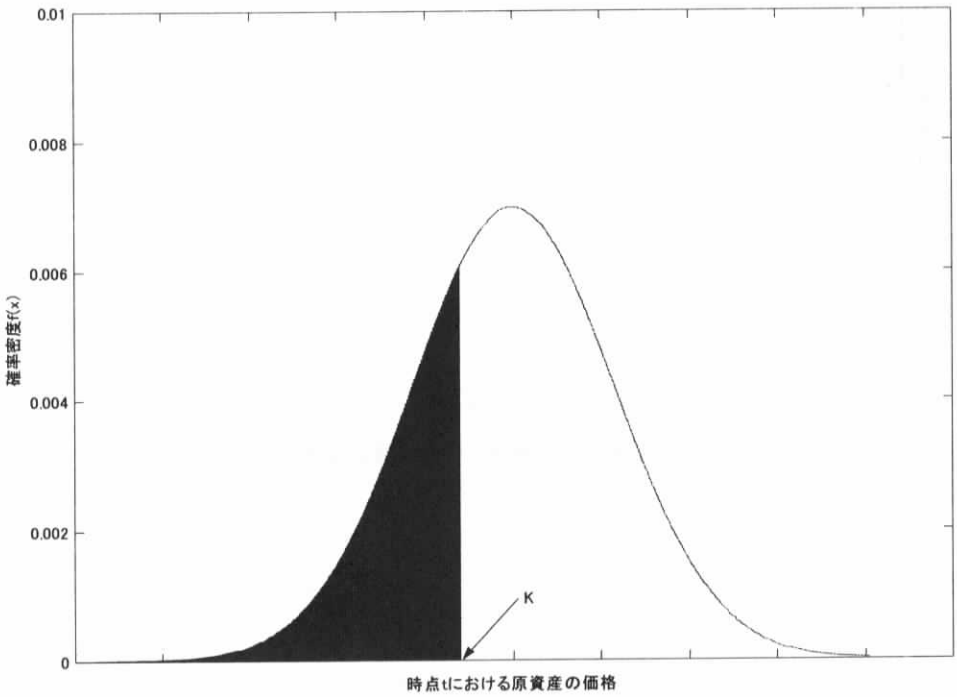

図2 原資産の確率密度関数のイメージ

リアル・オプションに関しても、将来のt時点における事業価値の確率密度関数を想定することにより、感覚的に理解することができる。まず、事業運営について、現時点で決めたものを将来も全く変更できない場合を考え、このt時点における事業価値の確率密度関数を$f(x)$とする。この事業価値の期待値は次式(1-3)で与えられる。

$$NPV_f = e^{-rt}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \tag{1-3}$$

同じ事業について、将来の事業環境に応じて柔軟に意思決定ができる場合を考えると、このt時点における事業価値の確率密度関数$g(x)$は、図3に示すように、ダウンサイドが薄くプラス側が厚い形状となるだろう。これは、将来の事業環境に応じて事業運営を見直すことができることは、損をする可能性を減らすことができると考えられるためである。この場合の事業価値の期待値は、次式(1-4)で与えられる。

$$NPV_g = e^{-rt}\int_{-\infty}^{\infty} xg(x)dx \tag{1-4}$$

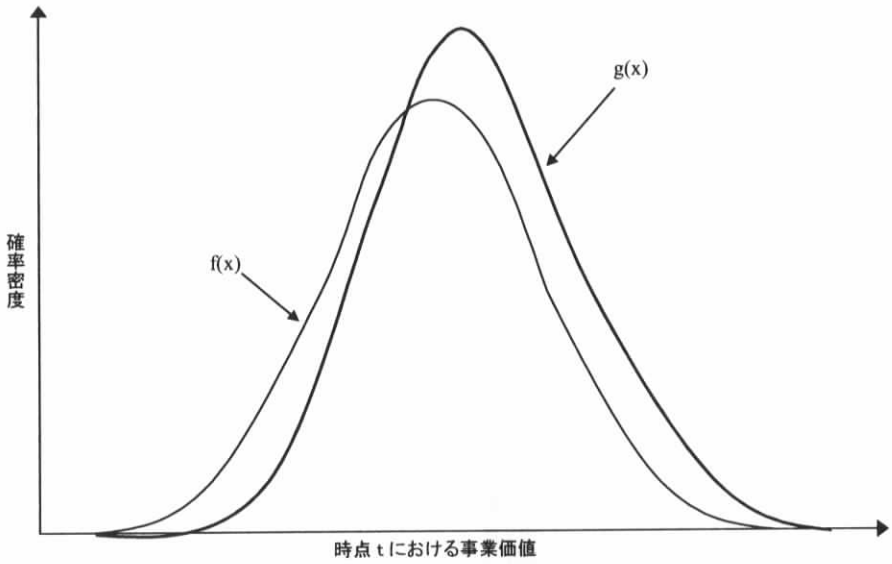

図3 意思決定の柔軟性の有無と事業価値の確率密度関数

リアル・オプションは、将来の事業環境に適合するように意思決定を行うことができることの価値であるから、その価値Qは式(1-3)(1-4)を用いて、次のように表すことができる。

$$Q = e^{-rt}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} xg(x)dx - \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx\right\} \tag{1-5}$$

また、リアル・オプションは比較的新しい概念であるが、将来の不確実性を考慮した最適戦略を検討する方法の一つとして、Bellman（1957）に始まる動的計画法（Dynamic Programming）がある。これは、逐次変化するプロセスの幾つかの時点において、その時点の状態と得られている情報に基づき意思決定を行って利得を得ることを繰り返す場合を想定し、総利得を最大にする戦略を見出す数学的手法である。動的計画法は、その後多方面での応用が進んで発展し、Lucas

(1987) はその功績により 1995 年のノーベル経済学賞を受賞している。

動的計画法とリアル・オプションは、将来の不確実性に注目している点で共通しているが、動的計画法は最適戦略の探索に主眼が置かれているのに対し、リアル・オプションはそうした最適戦略をとることができる場合の事業の総価値を、その可能性を踏まえて評価することに主眼を置くものである。両者は、相補的な関係にあるとも言えよう。よって、リアル・オプション評価の過程で動的計画法が応用されることも多く、Kulatilaka and Trigeorgis（1994）や Pindyck（1991）などの例がある。

2．リアル・オプションとDCF法

前掲図1では、DCF法による評価が事業のオプション価値を含まないものとして位置づけられているが、実際にはDCF法を拡張して、より適切な評価を行う試みがなされている。例えば、籠らの一連の研究（2000a、2000b、2000c）では、不動産投資によるキャッシュ・フロー予測に確率過程を導入し、リスクを考慮した収益率の分析が行われている。また、高辻ら（2000）は、投資の内部収益率に関する確率解析を行い、内部収益率の確率密度関数を推定している。

式(1-1)にみられるように、NPVを求めるには、将来のキャッシュ・フローC_iと割引率r_iを推定が必要となる。前川（1999）によると、DCF法とリアル・オプション法の差異は、前者が期待できるキャッシュ・フローをリスク調整利子率で割り引くことによりNPVを得るのに対し、後者は確実なキャッシュ・フロー（リスク中立なキャッシュ・フロー）を非危険利子率で割り引くことによりNPVを得るという点にあるとされる。こうした場合の問題は、オプション価値を評価する手法として、DCF法は本質的に適切でないという点にある。なお、前述の籠らの研究では、C_iを確率過程で表現して非危険利子率で割引いているので、リアル・オプション法に近いと言える。

ここでは、Trigeorgis（1993）や前川（1999）の数値例を引用して、オプション評価についてはリアル・オプション法が適していることを示す。まず、次のような簡単な二項過程を考える。括弧内は数値例であり、確率pで80%価格が上昇し、確率1-pで40%価格が下落することを想定したモデルである。Sが市場で取引されるような有価証券であった場合、現在の価格100は市場で得られる。なお、数値例の期間は簡単のため単位年（1年）としておく。

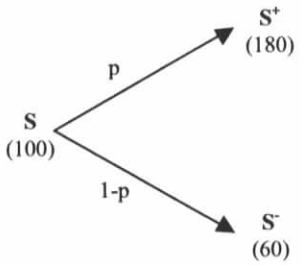

図4 数値例の二項過程

図4の例で未知なのは、確率pの値と割引率である。DCFの場合、割引率でリスクを調整するから、確率pを推定して外挿する。ここで、p=1-p=0.5であったとすると、リスク調整利子率Rは次式より求められる。

$$S = \frac{p \cdot S^{+} + (1-p) \cdot S^{-}}{(1+R)^{t}} \tag{2-1}$$

$$R = \frac{0.5 \cdot 180 + (1-0.5) \cdot 60}{100} - 1 = 0.2 \tag{2-2}$$

一方、リアル・オプション法では、非危険利子率を割引率として用いるため、キャッシュ・フローでリスクを調整する必要がある。ここで、非危険利子率をrとすると、リスク中立キャッシュ・フローは、次式の確率p'を用いて定めることができる。数値例としては、r=0.08とする。

$$(1+r)^t \cdot S = p' \cdot S^+ + (1-p') \cdot S^-$$

$$p' = \frac{(1+r)^t \cdot S - S^-}{S^+ - S^-} \tag{2-3}$$

$$p' = \frac{(1+0.08) \cdot 100 - 60}{180 - 60} = 0.4 \tag{2-4}$$

ここで、同様な数値例に基づく不動産開発事業を考える。ただし、開発に必要な現在の投資額（I_0）は104であるとする。図4のように、次期までのプロジェクト価値を考えた場合、$S<I_0$であるから、現時点では投資は行われない。問題は、次期まで開発を延期すること（例えば、開発権のような形で）に価値があるかであり、これは延期オプションの一種である。次期の投資額I_1は、非危険利子率を用いて次式のようになり、次期の各状況において得られる利益は、図5の通りである。

$$I_1 = I_0 \cdot (1+r) = 104 \cdot (1+0.08) = 112.32 \tag{2-5}$$

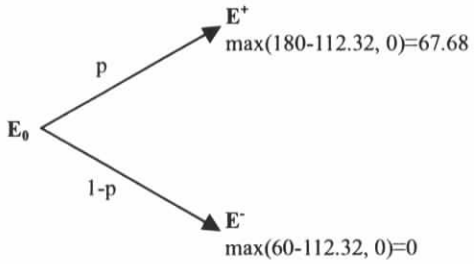

図5 延期オプションの数値例

図5の例に基づき、DCF法とリアル・オプション法のそれぞれについて、延期オプションの価値E_0を計算すると次のようになる。

DCF法：
$$E_0 = \frac{p \cdot E^+ + (1-p) \cdot E^-}{1+R} = \frac{0.5 \cdot 67.68 + 0.5 \cdot 0}{1+0.2} = 28.20 \tag{2-6}$$

リアル・オプション法：
$$E_0 = \frac{p' \cdot E^+ + (1-p') \cdot E^-}{1+r} = \frac{0.4 \cdot 67.68 + 0.6 \cdot 0}{1+0.08} = 25.07 \tag{2-7}$$

式(2-6)(2-7)をみてわかるように、両者のオプション価値は一致しない。そこで、どちらが正しいかを確かめるために、他資産との裁定を考える。延期オプションは、次期において価格I_1で原資産を購入する権利に相当するため、図4の例について次期に価格I_1（112.32）で有価証券S

を購入するコール・オプションを想定する。有価証券 α 単位の買いと、このコール・オプション 1 単位の売りからなるポートフォリオについて、α が次式を満たすときは、無リスクとなる。

$$180\alpha - E^{+} = 60\alpha$$
$$\alpha = \frac{67.68}{(180-60)} \tag{2-8}$$

ここで、コール・オプションの現在価値を P_c とし、非危険利子率で運用した場合を考えると、これは先の無リスクポートフォリオの価値と等しくなる。

$$(1+0.08)(100\alpha - P_c) = 180\alpha - E^{+} = 60\alpha \tag{2-9}$$

式(2-8)(2-9)から、コール・オプションの現在価値 P_c は 25.07 となり、式(2-7)と一致する。よって、この数値例では、DCF 法のオプション評価は過大であり、リアル・オプション法は正しいと言える。

$$P_c = 100 \cdot \frac{67.68}{120} - \frac{33.84}{1.08} = 25.07 \tag{2-10}$$

裁定理論からオプション価格を導く式(2-8)(2-9)(2-10)から分かるように、オプション価格の計算に次期の状況の生起確率 p は不要である。これは、オプション価格は原資産の期待収益率から独立であることを意味している。DCF 法では、期待収益率が割引率として採用されるが、オプション価格はこれと無関係なのである。

さらに、投資を延期することによって、現時点で生じる機会費用を回避していることも含めれば、延期オプションの価値は全体で次のように考えられる。

$$E_0 - (V_0 - I_0) = 25.07 - (100 - 104) = 29.07 \tag{2-11}$$

3．離散時間でのリアル・オプションの評価

3－1　単純な二項モデル

前項では、延期オプションについて、単純な二項モデルを用いたDCF法とリアル・オプション法の比較を行った。ここでは、Trigeorgis（1993）の数値例を引用して、成長オプションと段階的投資オプションについて、同様の単純な二項モデルに基づき、その基本的な考え方を述べる。数値例も図4に示したものと同じであるが、記号を変えて次に再掲する。また、初期投資額 I_0 は104とする。

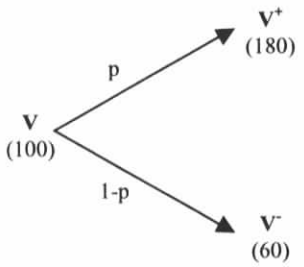

図6　単純な二項モデル

3-1-1　成長オプション

事業開始後に、市場の状況をみて事業を拡大できる場合、成長オプションを有すると考えられる。図6の例について、次期において事業規模を50%拡大するのに必要な投資額 I_E を40とする。このとき、各状況について期待できる事業価値は式(3-1)(3-2)で与えられ、成長オプションの価値は式(3-3)である。

$$E^+ = \max(V^+, 1.5V^+ - I_E) = \max(180, 270 - 40) = 230 \tag{3-1}$$

$$E^- = \max(V^-, 1.5V^- - I_E) = \max(60, 90 - 40) = 60 \tag{3-2}$$

$$E_0 = \frac{p' \cdot E^+ + (1 - p') \cdot E^-}{(1+r)^t} - I_0 = \frac{0.4 \cdot 230 + 0.6 \cdot 60}{1.08} - 104 = 14.5 \tag{3-3}$$

3-1-2　段階的投資オプション

これまでの例では、初期投資額 I_0 を104と考えてきたが、現時点では最低限必要な投資のみを行い、次期において市場の状況が望ましい場合に本格的な投資を行って利益を得ることができ、状況が望ましくない場合には事業を中断することができる場合を考える。ここで最低限必要な初期投資額 I_0 を44とすると、事業を本格化するのに必要な投資 I_1 は、現時点でみて残りの60となる。このとき、各状況について期待できる事業価値は式(3-4)(3-5)で与えられ、段階的投資オプションの価値は式(3-6)で得られる。

$$E^{+} = \max(V^{+} - I_1, 0) = \max(180 - 60 \cdot 1.08, 0) = 115.2 \tag{3-4}$$

$$E^{-} = \max(V^{-} - I_1, 0) = \max(60 - 60 \cdot 1.08, 0) = 0 \tag{3-5}$$

$$E_0 = \frac{p' \cdot E^{+} + (1 - p') \cdot E^{-}}{(1+r)^{t}} - I_0 = \frac{0.4 \cdot 115.2 + 0.6 \cdot 0}{1.08} - 44 = -1.33 \tag{3-6}$$

この例の場合、段階的投資オプションに関しては、式(3-6)のように負の値となるため、現時点において全額を投資する戦略を選択すべきであることが分かる。

3－2　経路依存型のリアル・オプション

以上では、2 時点からなる単純な二項モデルを考えてきたが、実際のプロジェクトでは意思決定の機会が複数訪れるのが普通である。また、どのような意思決定を行うかは、そのときの状態と想定される将来の状態に依存する。ここでは変更オプションについて、Trigeorgis（1993）の数値例を引用し、3 時点からなる二項モデルを検討する。まず、図 7 のようなキャッシュ・フローが想定される 2 種類のプロジェクトを考える。

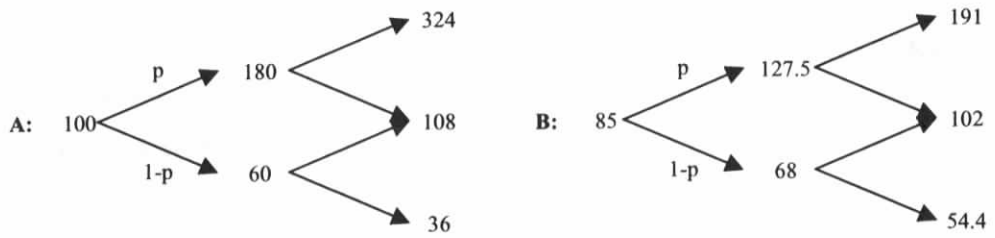

図 7　プロジェクトのキャッシュ・フロー

2 つのプロジェクトは、ともに同じような製品を作るものであり、A の方が高度な技術を用いるため製品は高価であるが、その技術が必要とされるような状況になれば、より多くのキャッシュ・フローを生む。一方、B にはそうした技術は用いられていないが製品は安価で、その技術が必要とされていない状況では、A と比較して多くのキャッシュ・フローを生むことができる。経営者が、状況に応じてどちらかのプロジェクトへ変更できる場合、変更オプションを有する。

非危険利子率をこれまでと同じ 8%ととすると、リスク中立なキャッシュ・フローを得るための確率 p は、両プロジェクトともに 0.4 である。このとき、各プロジェクトの NPV は、それぞれ次のようになる。ちなみに、リスク調整済み利子率についても、各状態の生じる確率を 0.5 とすれば、これまでと同様に 20%となる。

$$\begin{aligned} NPV(A) &= 100 + \frac{0.4 \cdot 180 + 0.6 \cdot 60}{1.08} + \frac{0.4^2 \cdot 324 + 2 \cdot 0.4 \cdot 0.6 \cdot 108 + 0.6^2 \cdot 36}{1.08^2} \\ &= 100 + 100 + 100 = 300 \end{aligned} \tag{3-7}$$

$$NPV(B) = 85 + 85 + 85 = 255 \tag{3-8}$$

3-2-1 変更にコストがかからない場合

二項モデルの各時点を、最初から 0、1、2 とし、時点 i においてプロジェクトを A から B に変更することにより得られるキャッシュ・フローを $c_i(A \to B)$ と記す。また、時点 i においてプロジェクトを A から B に変更することの価値を $S_i(A \to B)$ と記述する。

プロジェクト A について、時点 1 においてプロジェクトを変更することにより得られるキャッシュ・フローと、その価値は次の通りである。

$$c_1^+(A \to B) = \max(127.5 - 180, 0) = 0 \tag{3-9}$$

$$c_1^-(A \to B) = \max(68 - 60, 0) = 8 \tag{3-10}$$

$$\begin{aligned} S_1(A \to B) &= \frac{p \cdot c_1^+(A \to B) + (1-p) \cdot c_1^-(A \to B)}{1+r} \\ &= \frac{0.4 \cdot 0 + 0.6 \cdot 8}{1.08} = 4.4 \end{aligned} \tag{3-11}$$

また、時点 2 においてプロジェクトを A から B に変更することにより得られるキャッシュ・フローは、次の通りである。

$$c_2^{++}(A \to B) = \max(191 - 324, 0) = 0 \tag{3-12}$$

$$c_2^{+-}(A \to B) = \max(102 - 108, 0) = 0 \tag{3-13}$$

$$c_2^{--}(A \to B) = \max(54.4 - 36, 0) = 18.4 \tag{3-14}$$

時点 2 において、プロジェクトを A から B に変更することの価値は、時点 2 において得られるキャッシュ・フローを、1 時点ずつ前に戻すことにより得ることができる。時点 1 における 2 つの状態においては、それぞれ次のようになる。

$$\frac{p \cdot c_2^{++}(A \to B) + (1-p) \cdot c_2^{+-}(A \to B)}{1+r} = \frac{0.4 \cdot 0 + 0.6 \cdot 0}{1.08} = 0 \tag{3-15}$$

$$\frac{p \cdot c_2^{+-}(A \to B) + (1-p) \cdot c_2^{--}(A \to B)}{1+r} = \frac{0.4 \cdot 0 + 0.6 \cdot 18.4}{1.08} = 10.2 \tag{3-16}$$

よって、$S_2(A \to B)$ は、式 4-9 と式 4-10 の結果を用いて、次のように得られる。

$$S_2(A \to B) = \frac{0.4 \cdot 0 + 0.6 \cdot 10.2}{1.08} = 5.7 \tag{3-17}$$

以上から、プロジェクト A についての変更オプションの価値 $F(A \to B)$ は、次の通りである。

$$F(A \to B) = S_0(A \to B) + S_1(A \to B) + S_2(A \to B) = 0 + 4.4 + 5.7 = 10.1 \quad (3\text{-}18)$$

このとき、プロジェクトA全体の価値$V(A)$は次のようになる。

$$V(A) = NPV(A) + F(A \to B) = 300 + 10.1 = 310.1 \quad (3\text{-}19)$$

一方、プロジェクトBについても同様に計算することができ、次の結果が得られた。

$$S_0(B \to A) = 15 \quad (3\text{-}20)$$
$$S_1(B \to A) = 19.4 \quad (3\text{-}21)$$
$$S_2(B \to A) = 20.7 \quad (3\text{-}22)$$
$$F(B \to A) = S_0(B \to A) + S_1(B \to A) + S_2(B \to A) = 15 + 19.4 + 20.7 = 55.1 \quad (3\text{-}23)$$
$$V(B) = NPV(B) + F(B \to A) = 255 + 55.1 = 310.1 \quad (3\text{-}24)$$

3-2-2 変更にコストがかかる場合

プロジェクトの変更にコストがかからない場合、式(3-19)と式(3-24)にみられるように、両者のプロジェクト価値は等しくなる。しかし、通常はプロジェクトの変更にはコストがかかり、かつそれは非対称であると考えられる。ここで、プロジェクトAからBへの変更コスト$I(A \to B)$を8、BからAの変更コスト$I(B \to A)$を2として、変更オプションの価値を計算しなおしてみる。

まず、プロジェクトAについては、時点1の変更には式(3-10)が次のようになるため、価値が無くなる。

$$c_1^-(A \to B) = \max(68 - 60 - 8, 0) = 0 \quad (3\text{-}25)$$

また、時点2の変更に関しては、式(3-14)、式(3-16)、式(3-17)が、それぞれ次のようになる。

$$c_2^{--}(A \to B) = \max(54.4 - 36 - 8, 0) = 10.4 \quad (3\text{-}26)$$
$$\frac{p \cdot c_2^{+-}(A \to B) + (1-p) \cdot c_2^{--}(A \to B)}{1+r} = \frac{0.4 \cdot 0 + 0.6 \cdot 10.4}{1.08} = 5.78 \quad (3\text{-}27)$$
$$S_2(A \to B) = \frac{0.4 \cdot 0 + 0.6 \cdot 5.78}{1.08} = 3.2 \quad (3\text{-}28)$$

よって、プロジェクトAの変更オプションの価値と、全体の価値は次の通りである。

$$F(A \to B) = S_0(A \to B) + S_1(A \to B) + S_2(A \to B) = 0 + 0 + 3.2 = 3.2 \quad (3\text{-}29)$$
$$V(A) = NPV(A) + F(A \to B) = 300 + 3.2 = 303.2 \quad (3\text{-}30)$$

同様に、プロジェクト B についても計算しなおし、次の結果が得られる。式(3-30)と式(3-32)より、この条件の場合は、プロジェクト B から開始した方が、事業全体としての価値が高いことが分かる。

$$F(B \to A) = S_0(B \to A) + S_1(B \to A) + S_2(B \to A) = 13 + 18.7 + 19.6 = 51.3 \quad (3\text{-}31)$$

$$V(B) = NPV(B) + F(B \to A) = 255 + 51.3 = 306.3 \quad (3\text{-}32)$$

3-2-3 経路依存を考慮する場合

実際のプロジェクト変更では、その時点のキャッシュ・フローの比較だけでなく、プロジェクトを変更した場合に将来にわたって得られるキャッシュ・フローの期待値と、変更しない場合の期待値とが比較されると考えられる。これは、各時点の各状況それぞれについて、その後の経路が考慮されることである。こうした評価は、最終時点から開始時に向かって遡りながら、各状況の期待値を計算することで得られる。

まず、最終時点の各状態の期待値は次の通りである。

<プロジェクト A>

$V_2^{++}(A) = 324$

$V_2^{+-}(A) = 108$

$V_2^{--}(A) = \max(36, 54.4 - 8) = 46.4$ <u>B に変更</u>

<プロジェクト B>

$V_2^{++}(B) = \max(191, 324 - 2) = 322$ <u>A に変更</u>

$V_2^{+-}(B) = \max(102, 108 - 2) = 106$ <u>A に変更</u>

$V_2^{--}(B) = 54.4$

次に、時点 1 の各状態の期待値を、時点 2 の期待値を含めて考える。

<プロジェクト A>

$$V_1^{+}(A) = \max\left(180 + \frac{0.4 \cdot V_2^{++}(A) + 0.6 \cdot V_2^{+-}(A)}{1.08}, 127.5 + \frac{0.4 \cdot V_2^{++}(B) + 0.6 \cdot V_2^{+-}(B)}{1.08} - 8\right)$$

$$= 180 + 180 = 360$$

$$V_1^{-}(A) = \max\left(60 + \frac{0.4 \cdot V_2^{+-}(A) + 0.6 \cdot V_2^{--}(A)}{1.08}, 68 + \frac{0.4 \cdot V_2^{+-}(B) + 0.6 \cdot V_2^{--}(B)}{1.08} - 8\right)$$

$= 68 + 69.5 - 8 = 129.5$ <u>B に変更</u>

<プロジェクト B>

$$V_1^{+}(B) = \max\left(127.5 + \frac{0.4 \cdot V_2^{++}(B) + 0.6 \cdot V_2^{+-}(B)}{1.08}, 180 + \frac{0.4 \cdot V_2^{++}(A) + 0.6 \cdot V_2^{+-}(A)}{1.08} - 2\right)$$

$= 180 + 180 - 2 = 358$ <u>A に変更</u>

$$V_1^-(B) = \max\left(68 + \frac{0.4 \cdot V_2^{+-}(B) + 0.6 \cdot V_2^{--}(B)}{1.08}, 60 + \frac{0.4 \cdot V_2^{+-}(A) + 0.6 \cdot V_2^{--}(A)}{1.08} - 2\right)$$
$$= 68 + 69.5 = 137.5$$

最後に、時点 0 の各状態の期待値を、時点 1 の期待値を含めて考える。

<プロジェクト A>

$$V_0(A) = \max\left(100 + \frac{0.4 \cdot V_1^+(A) + 0.6 \cdot V_1^-(A)}{1.08}, 85 + \frac{0.4 \cdot V_1^+(B) + 0.6 \cdot V_1^-(B)}{1.08} - 8\right)$$
$$= 100 + 205.3 = 305.3$$

<プロジェクト B>

$$V_0(B) = \max\left(85 + \frac{0.4 \cdot V_1^+(B) + 0.6 \cdot V_1^-(B)}{1.08}, 100 + \frac{0.4 \cdot V_1^+(A) + 0.6 \cdot V_1^-(A)}{1.08} - 2\right)$$
$$= 100 + 205.3 - 2 = 303.3$$ <u>A に変更</u>

以上から、各プロジェクトの価値と、変更オプションの価値は次の通りである。

$$V(A) = 305.3 \tag{3-33}$$
$$F(A \to B) = V(A) - NPV(A) = 305.3 - 300 = 5.3 \tag{3-34}$$
$$V(B) = 303.3 \tag{3-35}$$
$$F(B \to A) = V(B) - NPV(B) = 303.3 - 255 = 50.3 \tag{3-36}$$

ただし、0 時点での B から A への変更を除いたオプション価値は 39

式(3-29)と式(3-34)を比較すると、経路依存を考慮した方が、変更オプション価値が高くなることが分かる。また、式(3-36)は 0 時点において A への変更価値を含むものであるが、変更オプションの価値としては、1 時点以降の変更を対象とすべきであろう。その場合、オプション価値は 39 となって、式 4-25 の 18.7+19.6=38.3 よりも大きい。さらに、経路依存を考慮しない場合は、プロジェクト B から開始する方が事業価値が高かったが、経路依存を考慮した場合は、式(3-33)と式(3-35)から分かるように、プロジェクト A から開始する方が事業価値が高い。

4．連続時間でのリアル・オプションの評価

4－1　二項過程との関係

連続時間におけるオプション評価のための数学的モデルとしては、原資産価格が幾何ブラウン運動にしたがうものとし、原資産価格と時間との関数としてオプション価格を表現するものが一般的に用いられている。これは、資産価格Sが、平均ドリフト率μ、ボラティリティσの幾何ブラウン運動にしたがうと仮定して、その変化率を次式(4-1)のようにモデル化する。

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz \tag{4-1}$$

ただし、$dz = \varepsilon(t)\sqrt{dt}$ であり、$\varepsilon(t)$ は平均 0、分散 1 の正規分布にしたがう確率変数

前項で検討した離散時間でのリアル・オプション評価では、二項過程により将来の事業価値をモデル化したが、この時点間隔を無限に小さくすると、式(4-1)で示される連続時間のモデルに帰着させることができる。ここで、現在の事業価値を S とし、次の時点においてこの価値は確率 p で u 倍となり、確率 1-p で d 倍となると仮定する。u、d、p が時点によらず一定であるとき、事業価値は図 8 のような二項過程にしたがう。

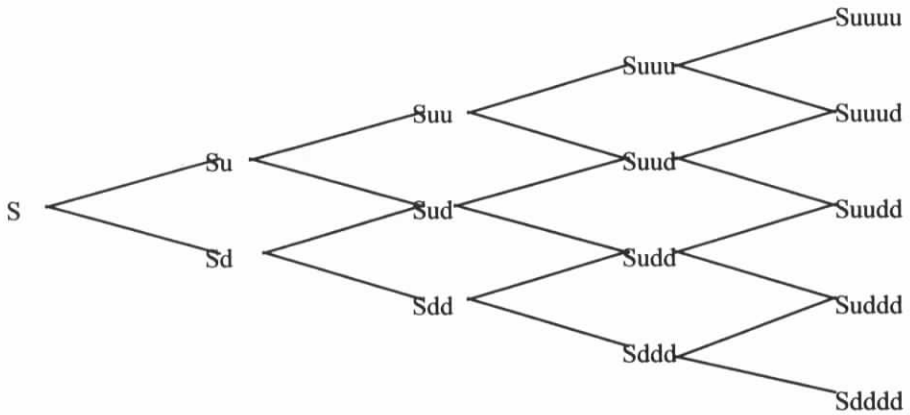

図 8　二項過程による事業価値のモデル化

事業完了までの時点数をnとし、事業完了時点に生じる状態をS_nとする。S_nを事業完了時点までに上昇する回数とすると、S_nは二項分布にしたがう離散的な確率変数である。ここで、この確率変数S_nを用いて、新たな確率変数S_Tを次の式(4-2)により定義する。確率変数S_Tは、事業完了時点Tにおける事業価値に他ならない。

$$S_T = S \cdot u^{S_n} \cdot d^{n-S_n} \tag{4-2}$$

式(4-2)は対数をとることにより、次のように変形できる。

$$\begin{aligned}\log S_T &= \log(S \cdot u^{S_n} \cdot d^{n-S_n}) = \log S + \log u^{S_n} + \log d^{n-S_n} \\ &= \log S + S_n \log u + (n - S_n)\log d \\ &= \log S + n\log d + S_n(\log u - \log d)\end{aligned} \tag{4-3}$$

S_nはに項分布にしたがうが、二項分布は正規分布に法則収束することが知られており、確率変数Xを標準正規分布（平均 0、分散 1）にしたがう確率変数とし、確率変数$\widetilde{S}_n$を次式(4-4)で定義すると、$\widetilde{S}_n$はXに法則収束する（ドモアブル・ラプラスの定理）。

$$\widetilde{S}_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \tag{4-4}$$

なお、$E[S_n] = np$、$V[S_n] = np(1-p)$

式(4-4)を、S_nについて解くと次の式(4-5)のようになる。

$$S_n = \sqrt{np(1-p)} \cdot \widetilde{S}_n + np \tag{4-5}$$

式(4-5)を式(4-3)に代入して、S_nを$\widetilde{S}_n$で置き換えると、次の式(4-6)が得られ、S_Tは連続的な確率変数となる。

$$\begin{aligned}\log S_T &= \log S + n\log d + \left(\sqrt{np(1-p)} \cdot \widetilde{S}_n + np\right)(\log u - \log d) \\ &= \log S + n\log d + np(\log u - \log d) + \sqrt{np(1-p)} \cdot (\log u - \log d) \cdot \widetilde{S}_n \\ &= \log S + n\left(p\log u + (1-p)\log d\right) + \sqrt{np(1-p)} \cdot (\log u - \log d) \cdot \widetilde{S}_n\end{aligned} \tag{4-6}$$

式(4-6)より、確率変数$\log S_T$は、平均$\log S + n\left(p\log u + (1-p)\log d\right)$、分散$np(1-p)(\log u - \log d)^2$の正規分布にしたがうことが分かる。正規分布に従う確率変数Xを用いて、$Y = e^X$で定義される確率変数 Y が従う確率分布が対数正規分布であるので、事業完了時点Tにおける事業価値S_Tは、以下の確率密度関数$f(x)$による対数正規分布に従う。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}\exp\left(-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{4-7}$$

ただし、$\sigma = \sqrt{np(1-p)} \cdot (\log u - \log d)$、$\mu = \log S + n\left(p\log u + (1-p)\log d\right)$

式(4-6)の右辺の $\log S$ を左辺に移行すると、次の式が得られる。

$$\log S_T - \log S = n\left(p\log u + (1-p)\log d\right) + \sqrt{np(1-p)}\cdot(\log u - \log d)\cdot \widetilde{S}_n$$

$$\log\left(\frac{S_T}{S}\right) = n\left(p\log u + (1-p)\log d\right) + \sqrt{np(1-p)}\cdot(\log u - \log d)\cdot \widetilde{S}_n \qquad (4\text{-}8)$$

式(4-8)の左辺は、現時点から事業完了時点 T にかけての事業価値の連続複利ベース変化率である。式(4-8)は、これが次のような正規分布に従うことを示している。

$$\log\left(\frac{S_T}{S}\right) \sim N\left(n(p\log u + (1-p)\log d), np(1-p)(\log u - \log d)^2\right) \qquad (4\text{-}9)$$

さらに、次のような確率変数 Z を定義する。

$$Z = \begin{cases} \log u, \Pr = p \\ \log d, \Pr = 1-p \end{cases} \qquad (4\text{-}10)$$

Z の期待値、すなわち 1 時点当たり変化率の対数の平均は次の式で得られ、これを μ とおく。

$$E[Z] = p\log u + (1-p)\log d = \mu \qquad (4\text{-}11)$$

また、Z の分散は、すなわち 1 時点当たり変化率の対数の分散は次の式で得られ、これを σ^2 とおく。

$$\begin{aligned} V[Z] &= E[Z^2] - E^2[Z] \\ &= p(\log u)^2 + (1-p)(\log d)^2 - \{p\log u + (1-p)\log d\}^2 \\ &= p(\log u)^2 + (1-p)(\log d)^2 - p^2(\log u)^2 - 2p(1-p)\log u\log d - (1-p)^2(\log d)^2 \\ &= p(1-p)(\log u)^2 - 2p(1-p)\log u\log d + p(1-p)(\log d)^2 \\ &= p(1-p)(\log u - \log d)^2 = \sigma^2 \end{aligned} \qquad (4\text{-}12)$$

以上から、式④⑤は次のように書き直すことができる。

$$\log\left(\frac{S_T}{S}\right) = n\mu + \sqrt{n}\sigma\cdot\widetilde{S}_n \qquad (4\text{-}13)$$

$$\log\left(\frac{S_T}{S}\right) \sim N\left(n\mu, n\sigma^2\right) \qquad (4\text{-}14)$$

ここで、1時点の時間的長さを単位時間（例えば、1日とか1年など）と考えると、時点数nは期間の長さを示す。つまり、現時点から事業完了時点Tにかけての事業価値の連続複利ベース変化率が従う正規分布は、平均が単位時間変化率の対数の平均に期間の長さを乗じたもの、分散が単位時間変化率の対数の分散に期間の長さを乗じたものとなる。式(4-13)を連続時点で考えたものをウィナー過程（ブラウン運動）と呼び、これは式(4-1)と同等のものである。

4－2　連続時間での基本モデル

資産価格Sが、式(4-1)の確率過程にしたがうとき、オプション価格の確率過程$F(S,t)$は、伊藤の補題を用いて、次の式(4-15)で与えられる。

$$dF = (\frac{\partial F}{\partial t} + \mu S \frac{\partial F}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2})dt + \sigma S \frac{\partial F}{\partial S} dz \tag{4-15}$$

ここで、このオプションを1単位空売りし、原資産を$\frac{\partial F}{\partial S}$単位購入するポートフォリオを考えると、このポートフォリオの価値Vは次の式(4-16)となる。また、微小時間dtにおけるポートフォリオの価値変化は、式(4-17)で表される。

$$V = -F + \frac{\partial F}{\partial S} S \tag{4-16}$$

$$dV = -dF + \frac{\partial F}{\partial S} dS \tag{4-17}$$

式(4-1)(4-15)(4-17)から、次の式(4-18)が得られる。

$$dV = -(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2})dt \tag{4-18}$$

式(4-18)はブラウン運動dzを含まないので、このポートフォリオが無リスクであることを示している。よって、このポートフォリオの収益率は、非危険利子率に一致する必要があるから、次式(4-19)が成り立つ。

$$\frac{dV}{Vdt} = r \tag{4-19}$$

式(4-16)(4-18)(4-19)から次式(4-20)が得られ、ブラック・ショールズ偏微分方程式と呼ばれる。これを何らかの方法で解くことができれば、オプション価格Fが得られる。

$$\frac{\partial F}{\partial t}+rS\frac{\partial F}{\partial S}+\frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}=rF \tag{4-20}$$

4－3　既存研究における評価モデルの例

式(4-1)に類した事業価値の確率過程を想定し、式(4-20)のような微分方程式を得る方法で、リアル・オプションの評価を行っている既存研究は多い。連続時間とする場合の利点の一つは、使用可能な数学的技術が豊富であることと思われる。ここでは、幾つかの既存研究で用いられている評価モデルを引用し、連続時間モデルのリアル・オプションへの応用方法について考察を行う。

4-3-1　中断オプション：Myers and Majd（1990）

Myers and Majd（1990）は、事業を中断するオプションの価値を評価している。α を事業から期待される収益率、γ を事業を行うに必要な支払い率（$C=\gamma P$）とすると、事業価値の確率過程は式(4-21)で表現される。このとき、事業中断オプションの価値を A とすると、式(4-22)の偏微分方程式を得る。

$$\frac{dP}{P}=\alpha dt-\gamma dt+\sigma dz \tag{4-21}$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P^2\frac{\partial^2 A}{\partial P^2}+(r-\gamma)P\frac{\partial A}{\partial P}-rA+\frac{\partial A}{\partial t}=0 \tag{4-22}$$

式(4-21)は、式(4-1)とほぼ同じものであり、式(4-1)の平均ドリフト率 μ に相当する部分が、期待収益率と支払い率の差 $\alpha-\gamma$ に置き換わっているに過ぎない。この研究では、適当な数値例について式(4-22)による事業中断オプションの価値を評価し、事業を中断すべき状況、すなわち事業価値より中断オプションの価値の方が高くなる場合が生じることを示している。また、同じ事業価値であれば、事業完了までの残存期間が長いほど中断オプションの価値は高まり、同じ残存期間であれば、事業価値が低いほど中断オプションの価値は高まることを指摘している。

4-3-2　機会費用の評価：Majd and Pindyck（1987）

Majd and Pindyck（1987）は、工場などの建設を開始してから、工場が完成して事業価値を持つようになるには時間が必要であることに特に注目し、投資計画の評価を行っている。完成した事業の価値 V の確率過程は、次式(4-23)で表現される。ここで、μ は完成した事業から期待される収益率、δ は完成までの期間による機会費用を示す。

$$\frac{dV}{V}=(\mu-\delta)dt+\sigma dz \tag{4-23}$$

ここで、完成させるのに残存している投資額をK、事業を中断した場合の価値$V^*(K)$とし、$V > V^*$の場合に投資率kで投資を実行、$V < V^*$では投資を行わないという投資計画を考える。この計画の価値を、それぞれ$F(V,K)$、$f(V,K)$として、次の偏微分方程式を得る。

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 \frac{\partial^2 F}{\partial V^2} + (r-\delta)V\frac{\partial F}{\partial V} - rF - k\frac{\partial F}{\partial K} - k = 0 \tag{4-24}$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 \frac{\partial^2 f}{\partial V^2} + (r-\delta)V\frac{\partial f}{\partial V} - rf = 0 \tag{4-25}$$

Myers and Majd（1990）と同様に、事業価値の確率過程を示す式(4-23)は、式(4-1)とほぼ同じであり、式(4-1)の平均ドリフト率μに相当する部分が、機会費用を考慮した$\mu-\delta$に置き換わっているだけである。

この研究では、適当な数値例を用いて、投資のスピード（k）と事業を中断する価値水準（V^*）の関係、ならびに機会費用（δ）と事業を中断する価値水準（V^*）の関係を検討している。投資のスピード（k）との関係に関しては、投資のスピード（k）が低い場合は、機会費用（δ）に対するV^*の変化は大きく、逆に機会費用（δ）が大きい場合は、投資のスピード（k）に対するV^*の変化は大きい。投資のスピードを上げることで、V^*を小さくすることができるとしている。また、機会費用（δ）との関係に関しては、投資のスピード（k）が低い場合は、機会費用（δ）に対するV^*の変化は大きく、逆に、投資のスピード（k）が高い場合は、機会費用（δ）に対するV^*の変化は小さいことを指摘している。

4-3-3 投資実行の意思決定： McDonald and Siegel（1986）

McDonald and Siegel（1986）は、投資を行うかどうかの意思決定について、事業価値Vと投資額Fの比V/Fを用い、これが一定水準C^*に達した時点で投資を行うようにした場合の投資機会の価値を評価している。この研究では、2 つの確率過程が同時に用いられており、VとFはともに幾何ブラウン運動にしたがうとされ、それぞれ式(4-26)(4-27)のように与えられる。また、求めるべき投資機会の価値Xは、式(4-28)のようになる。

$$\frac{dV}{V} = \alpha_v dt + \sigma_v dz_v \tag{4-26}$$

$$\frac{dF}{F} = \alpha_f dt + \sigma_f dz_f \tag{4-27}$$

$$X = E[(V_t - F_t)e^{-\mu t}] = (C^* - 1)E[F_t e^{-\mu t}] \tag{4-28}$$

式(4-28)については、$E[F_t e^{-rt}]$に関する偏微分方程式を導き（Malliaris and Brock, 1982）、これを解くことで次の簡便な式が得られている。

$$X = (C^* - 1)F_0\left(\frac{V_0 / F_0}{C^*}\right)^{\varepsilon} \tag{4-29}$$

ただし、

$$\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{\alpha_v - \alpha_f}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2(\mu - \alpha_f)}{\sigma^2}} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha_v - \alpha_f}{\sigma^2}\right)$$

$$C^* = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}$$

$$\sigma^2 = \sigma_v^2 + \sigma_f^2 - 2\rho_{vf}\sigma_v\sigma_f$$

また、ポアッソン過程を合成することにより、事業価値Vがゼロになってプロセスが停止する場合もモデル化している。

$$\frac{dV}{V} = \alpha_v dt + \sigma_v dz_v + dq \tag{4-30}$$

ただし、$dq = \begin{cases} -1 & \Pr.\lambda dt \\ 0 & \Pr.1 - \lambda dt \end{cases}$

このとき、求めるべき投資価値は式(4-31)のように書き直されるが、これは式(4-32)のようになって式(4-28)と同等のものになり、式(4-29)においてμの代わりに$\mu + \lambda$を用いればよいとされている（Merton, 1971）。

$$X^* = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda T} X(T) dT \tag{4-31}$$

$$X^* = \max_{\{C_t'\}} E[e^{-(\mu+\lambda)t'} F(C_t' - 1)] \tag{4-32}$$

この研究で検討されているのは、延期オプションの価値である。つまり、延期オプションに価値があるときは、投資をすぐに実行しないで、最適な時期を待つ方が良い。この延期オプションの価値を適当な数値例に基づいて計算した上で、現実的なパラメータを想定した場合については、V/Fが2を超えるまで、投資を待った方が良いとの指摘を行っている。また、ポワッソン事象の発生確率（λ）が高まると、オプション価値は減少するとされている。これは、事業価値が無くなる確率が高い場合には、延期オプションの価値は減少するということを意味している。

参考文献

Bellman, R. （1957） *Dynamic Programming*, Princeton University Press, New Jersey

Black, F. and M. Scholes （1973） The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, Vol.81, pp.635-654

Copeland, T. and V. Antikarov （2001） *Real Options: a practitioner's guide*, TEXERE LLC, New York

籠義樹・高辻秀興・小野宏哉・吉田昌樹・中山博貴・川野真治（2000a）「モンテカルロ法による VaR を用いた不動産投資リスク評価手法に関する研究」、麗澤経済研究、Vol.8、No.1、pp.63-77

籠義樹・高辻秀興・小野宏哉（2000b）「空室率と賃料の変動過程を考慮した不動産投資モデルの期待収益率と VaR に関する研究」、麗澤経済研究、Vol.8、No.2、pp.99-114

籠義樹・高辻秀興・小野宏哉（2000c）「VaR を適用した不動産投資収益率評価手法の開発」、麗澤経済研究センターWorking Paper No.1、pp.1-10

刈屋武昭・山本大輔（2001）『入門　リアル・オプション―新しい企業価値評価の技術―』東洋経済新報社

Kulatilaka, N. and L. Trigeorgis （1994） The General Flexibility to Switch: Real Options Revisited, *International Journal of Finance*, Vol.6, No.2, pp.778-798

Lamberton, D. and B. Lapeyre （1997） *Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance*, Ellipses, Paris, 邦訳『ファイナンスへの確率解析』森平爽一郎監修、青木信隆・岩村伸一・大多和亨・中川秀敏訳、朝倉書店、2000 年

Lucas, R. E. （1987） *Models of Business Cycles*, Basil Blackwell, Oxford

前川俊一（1999）『不動産投資分析論』清文社

Majd, S. and Pindyck, R. S. （1987） Time to Build, Option Value, and Investment Decisions, *Journal of Financial Economics*, Vol.18, March, pp.7-27

Malliaris, A. G. and W. A. Brock （1982） *Stochastic Methods in Economics and Finance*, North Holland Publishing, Amsterdam

Merton, R. C. （1971） Optimal Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model, *Journal of Economic Theory*, Vol.3, pp.373-413

Merton, R. C. （1973） Theory of rational option pricing, *Bell Journal of Economics and Management Sciences*, Vol.4, pp.141-183

McDonald, R. and D. Siegel （1986） The Value of Waiting to Invest, *Quarterly Journal of Economics*, Vol.101, November, pp.707-727

Myers, S. C. （1987） Finance Theory and Financial Strategy, *Midland Corporate Finance Journal*, Spring, pp.6-13

Myers, S. C. and S. Majd （1990） Abandonment Value and Project Life, *Advanced in Futures and Options Research*, Vol.4, pp.1-21

Pindyck, R. S. （1991） Irreversibility, Uncertainty, and Investment, *Journal of Economic Literature*, Vol.29, No.3, pp.1110-1148

Schwartz, E. S. and L. Trigeorgis （2001） *Real Options and Investment Under Uncertainty: Classical Readings and Recent Contributions*, MIT Press, Cambridge

高辻秀興・籠義樹・小野宏哉・吉田昌樹・中山博貴・川野真治（2000）「投資プロジェクト評価のための内部収益率の確率密度関数に関する考察」、麗澤経済研究、Vol.8、No.1、pp.105-117

Trigeorgis, L. （1993） Real Options and Interactions with Financial Flexibility, *Financial Management*, Vol.22, No.3, pp.202-224

Trigeorgis, L. （1996） *Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation*, MIT Press, Cambridge