

# 平均分散ポートフォリオ選択問題における 状態変数の選択について

上村 昌司\*

## 概 要

本論文では、Brandt and Santa-Clara (2006) の手法を用いて、日本市場における株式指数と安全資産への投資問題の最適解をよく説明する状態変数の候補を調べる。1986年1月から2007年12月までの月次データを用いて、配当利回り、期間スプレッド、トレンド変数が平均分散基準にしたがう投資家の最適投資比率を説明するかどうかを実証する。

## 1 はじめに

近年の金融市場の実証分析により株価収益率のモーメントが時間とともに変動し予測可能性を持つことが明らかになってきている。この事実を Markowitz の平均分散問題に取り込むと

$$\max_{\phi_t} E \left[ r_{t+1}^p - \frac{\gamma}{2} (r_{t+1}^p)^2 \middle| z_t \right] \quad (1)$$

という条件付きの最適化問題を考えることになる。ここで、 $\phi_t$  は  $t$  時点における危険資産への投資比率、 $r_{t+1}^p = \phi_t r_{t+1}$ 、 $r_{t+1}$  は危険資産の超過収益率、 $z_t$  は状態変数ベクトル、 $\gamma > 0$  はリスク回避度に関する定数である。(1) を解くと

$$\phi_t = \frac{1}{\gamma} \frac{E[r_{t+1} | z_t]}{E[(r_{t+1})^2 | z_t]} \quad (2)$$

となる。よって、最適投資比率は状態変数  $z_t$  の関数となり、 $z_t$  の変化にあわせて投資比率を変化させることが有効となる。本論文の問題意識は最適投資比率を説明する  $z_t$  としてどのような変数を選ぶべきかという点にある。

通常 (2) を実装するには、 $r_{t+1}$  の条件付きモーメントを  $z_t$  の関数としてモデル化し、それらを (2) に代入する。その際、 $r_{t+1}$  を予測する  $z_t$  を選ぶことになるが、(2) の非線形性のためにそういった  $z_t$  が必ずしも最適投資比率をよく説明するとは限らない。たとえば、人工的な例ではあるが、 $r_{t+1}$  が GARCH-M 過程 (Engle et al. [5])

$$\begin{aligned} r_{t+1} &= \beta \sigma_t^2 + \epsilon_{t+1} \\ \epsilon_{t+1} &= \sigma_t z_{t+1}, \quad z_{t+1} \sim N(0, 1) \end{aligned}$$

\* 〒277-8686 千葉県柏市光ヶ丘 2-1-1 麗澤大学経済学部、Email:kamimura@reitaku-u.ac.jp. 本論文の作成にあたって、麗澤大学特別研究助成金からの助成を受けたことを感謝する。

にしたがうとしよう。ここで  $\sigma_t$  は何らかの GARCH 過程にしたがうものとする。このとき、 $z_t = \sigma_t$  とすると

$$E[r_{t+1}|\sigma_t] = \beta\sigma_t^2, E[r_{t+1}^2|\sigma_t] = \beta^2\sigma_t^4 + \sigma_t^2$$

となり、それぞれの条件付きモーメントは  $\sigma_t$  の関数になっている。ここで、 $\beta^2\sigma_t^4$  は期待収益率の 2 乗だから十分に 0 に近いとみなすことができ、そのとき最適投資比率は  $\sigma_t$  に依存しない定数  $\phi_t = \beta/\gamma$  となる。そこで、Aït-Sahalia and Brandt [1] や Brandt and Santa-Clara [2] は投資比率を  $\phi_t = \theta^\top z_t$  ( $\theta$  は実数ベクトル) とパラメータ化し、条件付き問題 (1) を無条件問題

$$\max_{\theta} E \left[ (\theta^\top z_t) r_{t+1} - \frac{\gamma}{2} ((\theta^\top z_t) r_{t+1})^2 \right] \quad (3)$$

に帰着させることを提案している。この無条件問題における期待値を標本平均に置き換えることにより、最適な  $\theta$  を求めることができ、さらにその  $\theta$  の統計的有意性を調べることもできる。すなわち、 $z_t$  のどの成分が最適投資比率にとって重要なかを判断することができる。Brandt and Santa-Clara [2] は (3) を回帰分析に帰着することによって、 $\theta$  の有意性を調べている。

本論文では、Brandt and Santa-Clara [2] の手法を用いて、日本市場における株式指数と安全資産への投資問題に対する最適投資比率にとって重要な状態変数の候補を調べる。

## 2 方法

安全資産と 1 つの危険資産への投資問題を考える。 $W_t, z_t, R_t, R_t^f$  をそれぞれ  $t$  時点における投資家の富、状態変数ベクトル、危険資産の粗収益率ベクトル、安全資産の粗利率とする。 $\phi$  を危険資産への投資比率とすると、予算制約式は  $W_{t+1} = W_t (R_t^f + \phi (R_{t+1} - R_t^f))$  となる。簡単のため  $W_t = 1$  とし、 $r_{t+1}^p = \phi r_{t+1}, r_{t+1} = R_{t+1} - R_t^f$  とおく。まず、つぎの期待 2 次効用関数最大化問題を考える。

$$\max_{\phi} E \left[ W_{t+1} - \frac{\gamma}{2} W_{t+1}^2 \right] \quad (4)$$

ここで、 $\gamma$  を適当に取り直すことによって (4) は

$$\max_{\phi} E \left[ r_{t+1}^p - \frac{\gamma}{2} (r_{t+1}^p)^2 \right] \quad (5)$$

となる。さらに、(5) は

$$\min_{\phi} E \left[ \left( r_{t+1}^p - \frac{1}{\gamma} \right)^2 \right] \quad (6)$$

同等である。よって、 $r_{t+1}^p = \phi r_{t+1}$ であることを考慮すると (6) の最適解  $\phi^*$  をもとめるには  $1/\gamma$  から超過収益率ベクトル  $r_{t+1}$  が張る部分空間への射影の足を求めればよいことになる。 $1/\gamma$  はどのような状態が実現してもつねに正の値をとる確率変数とみなせることから、裁定機会を表わす超過収益率とみなすことができる。 $\phi^*$  を求めるには、線形回帰モデル

$$\frac{1}{\gamma} = \phi r_{t+1} + u_{t+1} \quad (7)$$

において最小2乗法を行えばよい。回帰分析 (7) は非説明変数  $1/\gamma$  が確率的でない点などにおいて通常の回帰分析とは異なるが、Britten-Jones [3] によって回帰係数  $\phi$  の有意性などは通常の回帰分析の枠組みで導出できることが示されている<sup>1)</sup>。

4節で示すように、回帰係数  $\phi$  が時間とともに変化するように思われる場合がある。そのときは条件付きモデルを考える。時刻  $t$  における  $\phi$  が  $K$  次元状態変数ベクトル  $z_t$  を使って  $\phi_t = \theta^\top z_t$  と書けると仮定する。ここで  $\theta \in \mathbb{R}^K$  であり、 $z_t$  の第1成分は通常は1とする。すると、(7) の代わりに

$$\frac{1}{\gamma} = (\theta^\top z_t) r_{t+1} + u_{t+1} \quad (8)$$

すなわち、

$$\frac{1}{\gamma} = \theta^\top \tilde{r}_{t+1} + u_{t+1} \quad (9)$$

を考えることになる。ここで、

$$\tilde{r}_{t+1} = z_t \otimes r_{t+1} = (z_t^1 r_{t+1}, z_t^2 r_{t+1}, \dots, z_t^K r_{t+1})^\top$$

である。 $\tilde{r}_{t+1}$  はつぎのような解釈ができる。 $\tilde{r}_{t+1}$  の第  $i$  成分は

$$\tilde{r}_{t+1}^i = z_t^i r_{t+1} = z_t^i (R_{t+1} - R_f) = z_t^i R_{t+1} + (1 - z_t^i) R_f - R_f$$

となる。 $z_t^i R_{t+1} + (1 - z_t^i) R_f$  の部分は時刻  $t$  における危険資産への投資比率を  $z_t^i$  としたポートフォリオの収益率とみなすことができる。このポートフォリオを管理ポートフォリオ (managed portfolio) とよぶ<sup>2)</sup>。よって、 $\tilde{r}_{t+1}$  は管理ポートフォリオの超過リターンとみなすことができる。よって、条件付きモデルでありながら (9)、すなわち (8) は管理ポートフォリオへの投資問題に対する無条件モデルとみなすことができる。 $\tilde{r}_{t+1}$  の標本を用いて最小2乗法により (7) の回帰係数  $\theta^*$  が求まる。さらに  $\theta^*$  の第  $i$  成分  $(\theta^*)^i$  が統計的に有意であれば、状態変数  $z_t^i$  が最適投資比率を説明する変数として統計的に有意であることになる。この枠組みを利用してどのような状態変数が最適投資比率を説明するかを次節以降で調べる。

なお、(9) と同等な最適化問題は

$$\max_{\theta} E \left[ \tilde{r}_{t+1}^{\theta} - \frac{\gamma}{2} (\tilde{r}_{t+1}^{\theta})^2 \right] \quad (10)$$

である。ここで、 $\tilde{r}_{t+1}^{\theta} = \theta^\top \tilde{r}_{t+1}$  である。(10) は適当な条件のもとで条件付き問題と同等である。実際、条件付き問題

1) ただし、Britten-Jones [3] は説明変数が多変量正規分布にしたがうことを仮定していることに注意せよ。

2) 管理ポートフォリオについては Hansen and Richard [6] や Cochrane [4] を参照せよ。

$$\max_{\phi_t} E \left[ r_{t+1}^{\phi} - \frac{\gamma}{2} (r_{t+1}^{\phi})^2 \middle| z_t \right] \quad (11)$$

において投資比率を  $\phi_t = \theta^T z_t$  とパラメータ化する。すると (11) は

$$\max_{\theta} E \left[ \tilde{r}_{t+1}^{\theta} - \frac{\gamma}{2} (\tilde{r}_{t+1}^{\theta})^2 \middle| z_t \right] \quad (12)$$

となる。もし、この最適化問題が時刻  $t$  に依存しない最適解  $\theta^*$  をもつならば、 $\theta^*$  は無条件問題 (10) の解でもあるはずである。よって、 $\phi_t = \theta^T z_t$  というパラメータ化が正しく、さらに定常性の仮定が満たされるならば無条件問題 (10) と条件付き問題 (11) は同等である。

### 3 データ

本論文では株価指数として TOPIX、安全資産の収益率として10年物国債の利回りを用いる。標本期間は1986年1月から2007年12月とし、データは月次、分析は1986年から2007年12月までと1992年1月から2007年2月の2つの期間を対象に行った。後者の分析を行ったのは、1980年代後半から1990年代初頭にかけてのいわゆるバブル期の影響を除くためである。

状態変数として、Ait-Sahalia and Brandt [1] はデフォルトスプレッド、対数配当利回り、期間スプレッド、トレンドを用いており、Brandt and Santa-Clara [2] はデフォルトスプレッド、対数配当利回り、期間スプレッド、短期国債の利回りからその12ヶ月移動平均を除いた変数、を用いている。本論文では、状態変数として、対数配当利回り (DP)、期間スプレッド (Term)、トレンド (Trend) を用いる。対数配当利回りは東証1部実績利回りの対数をとったもの、期間スプレッドは日経公社債インデックス (長期) から同インデックス (短期) を除いたもの、トレンドは TOPIX レベルの対数から TOPIX レベルの過去12ヶ月平均の対数を除いたものを用いた。

表1から表5、また図1において株価指数の超過収益率 (TOPIX) と状態変数の基本統計量、各状態変数間の相関係数、各状態変数の自己相関係数を示している。

表1 1986年1月から2007年12月における TOPIX の超過収益率と3つの状態変数 (対数配当利回り (DP)、期間スプレッド (Term)、トレンド (Trend)) の月次データの基本統計量

	平均	中央値	標準偏差	歪度	尖度	最小値	最大値
TOPIX	0.0002	-0.0002	0.0563	0.0203	3.7652	-0.2104	0.1750
DP	-0.0947	-0.0844	0.1367	-0.2799	2.1180	-0.4095	0.1739
Term	0.0068	0.0076	0.0078	-0.7348	2.9664	-0.0054	0.0152
Trend	0.0025	0.0040	0.0525	-0.1758	2.6943	-0.1828	0.1152

表 2 1992年1月から2007年12月における TOPIX の超過収益率と3つの状態変数（対数配当利回り（DP）、期間スプレッド（Term）、トレンド（Trend））の月次データの基本統計量

	平均	中央値	標準偏差	歪度	尖度	最小値	最大値
TOPIX	-0.0015	-0.0023	0.0510	0.1403	3.1617	-0.1605	0.1320
DP	-0.0365	-0.0242	0.1033	-0.4184	2.4868	-0.3221	0.1739
Term	0.0084	0.0088	0.0036	-0.4193	2.6190	-0.0006	0.0152
Trend	-0.0029	-0.0055	0.0494	0.1235	2.2243	-0.1141	0.1071

表 3 1986年1月から2007年12月における状態変数間の標本相関行列

	DP	Term	Trend
DP	1	-0.0399	-0.4193
Term	-0.0399	1	0.3705
Trend	-0.4193	0.3705	1

表 4 1992年1月から2007年12月における状態変数間の標本相関行列

	DP	Term	Trend
DP	1	0.2202	-0.2613
Term	0.2202	1	0.2937
Trend	-0.2613	0.2937	1

表 5 1986年1月から2007年12月における各状態変数の標本自己相関係数

	$\rho_1$	$\rho_3$	$\rho_6$	$\rho_{12}$
DP	0.978	0.927	0.834	0.637
Term	0.973	0.904	0.802	0.543
Trend	0.910	0.687	0.338	0.035

#### 4 実証分析結果

実証分析ではすべて  $\gamma=5$  とした。また、実証分析においては各状態変数を平均 0、標準偏差 1 に正規化したものを用いた。まず、無条件最適化問題の解を回帰分析 (7) により求めた結果が表 6 に報告されている。1986年から2007年における  $k$ -値は0.959、1992年から2007年においては0.693となり、どちらの期間においても最適ポートフォリオは統計的に有意とは言えない。さらに、60ヶ月ローリング回帰分析の結果、すなわち標本期間中の各時点において過去60ヶ月のデータを用いて得た結果を図 2 に示した。かなり最適投資比率が変動しているように見える。これらの結果は最適投資比率は時間とともに変動していることを示唆している。

つぎに条件付きの回帰分析 (9) を行った結果が表 7 に報告されている。1986年1月から2007年12月のデータを使ったときの最適投資比率は

$$\phi_t^* = 0.1596 + 0.5354 \text{ DP}_t - 0.1676 \text{ Term}_t + 0.2661 \text{ Trend}_t$$

(0.2330)
(0.2623)
(0.2324)
(0.2123)

となり、1992年1月から2007年12月のデータを使ったときのそれは

図1 1986年1月から2007年12月における各状態変数の時系列プロットと標本自己相関係数

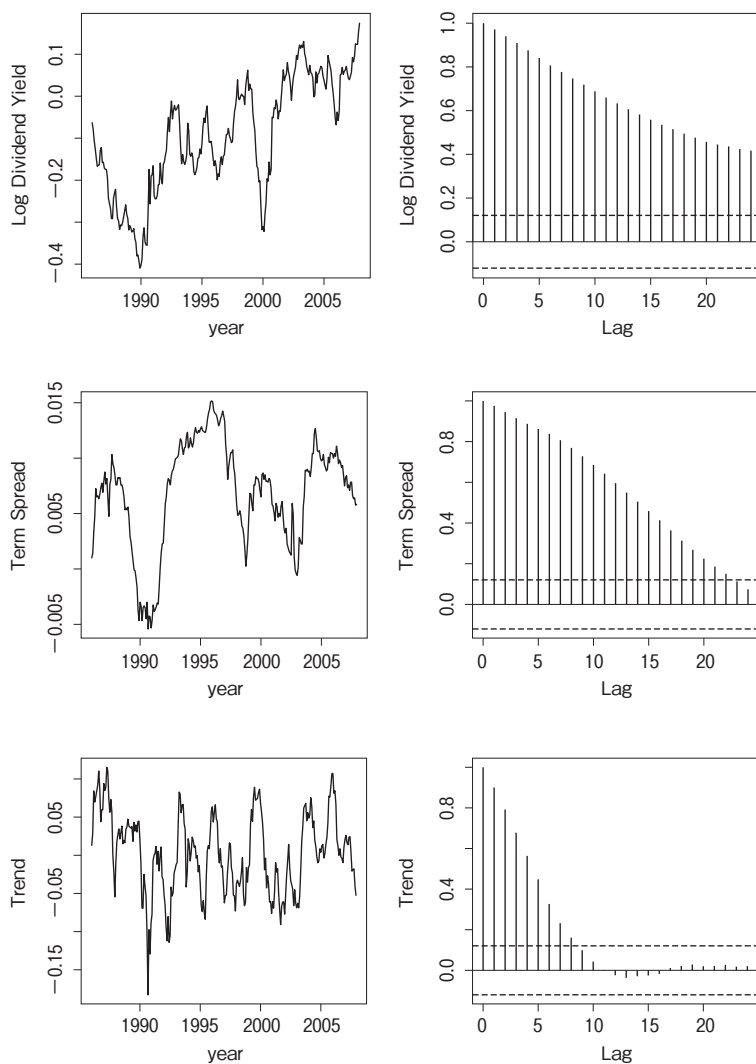


表6 無条件最適問題の解と  $p$ -値

左の列は1986年1月から2007年12月データ、右の列は1992年1月から2007年12月のデータを使って得た値。括弧内は標準誤差を表わす。

	1986-2007	1992-2007
投資比率	0.0114 (0.21595)	-0.5617 (0.2843)
$p$ -値	0.959	0.693

図2 60ヶ月ローリング回帰分析の結果

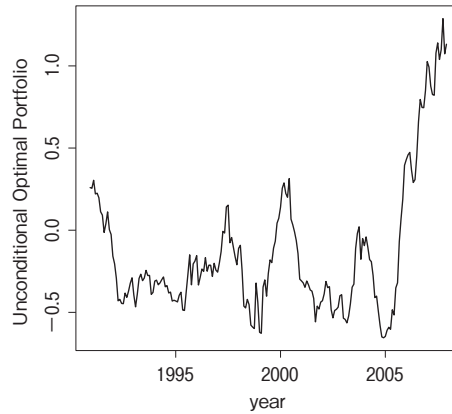


表7 条件付き回帰分析を行った結果

各状態変数に対する回帰係数を示している。標本期間は左の列が1986年1月から2007年12月、右の列が1992年1月から2007年12月。括弧内は回帰係数の標準誤差を表わす。 $p$ -値は定数を除く状態変数の係数がすべてゼロであるという仮説に対する $F$ 検定の結果を表わす。 $**$ と $*$ はそれぞれ1%、5%水準で有意なことを示す。

	1986-2007	1992-2007
定数	0.1596 (0.2330)	0.0780 (0.2847)
DP	0.5354 (0.2623)*	1.1679 (0.3827)**
Term	-0.1676 (0.2324)	0.5070 (0.3283)
Trend	0.2661 (0.2123)	0.4543 (0.2918)
$p$ -値	0.1396	0.0118

$$\phi_t^* = 0.0780 + 1.1679 DP_t + 0.5070 Term_t + 0.4543 Trend_t$$

(0.2847)
(0.3827)
(0.3283)
(0.2918)

となっている。括弧内は係数の標準誤差を表わす。いずれの期間においても対数配当利回り(DP)が統計的に有意である。米国のデータを使ったAit-Sahalia and Brandt [1]とBrandt and Santa-Clara [2]の結果と異なり、期間スプレッドとトレンドの統計的な有意性は得られなかった。ただし、本論文には報告していないが、標本期間をいろいろ変化させた結果をみると、トレンドが統計的に有意になる期間が多い一方で期間スプレッドが統計的に有意になる期間はほとんどなかった。また、対数配当利回りは安定して統計的に有意性を示していた。また、状態変数の回帰係数がすべてゼロであるという仮説は1992年から2007年のデータでは5%水準で棄却された。一方で、1986年から2007年のデータでは10%水準でも棄却されなかった。これはバブル期の株価変動の影響だと思われる。

## 5 結 論

本論文では、Brandt and Santa-Clara [2] の手法を用いて、日本の株式市場において平均分散基準にしたがう投資家の最適投資比率が時間とともに変動しているかどうか、そしてその変動を説明する状態変数の候補として配当利回り、期間スプレッド、トレンドを用い、これらの変数が最適投資比率を説明するかどうかを分析した。Ait-Sahalia and Brandt [1] や Brandt and Santa-Clara らの米国市場データの分析結果と同様に配当利回りは最適投資比率を説明する状態変数として統計的に有意であることが分かった。しかし、期間スプレッドとトレンドに対して統計的有意性は得られなかった。よって、少なくとも配当利回りの変動に応じて投資比率を変化させる戦略には意味があることが分かった。

今後の課題としてつぎのようなものがあげられる。まず、本論文では既存研究で用いられている状態変数の一部しか用いることができなかった。今後の研究においてはデフォルトスプレッドなどの状態変数を取り込む必要があるだろう。理論的な面では線形回帰モデル  $1/\gamma = \theta^T \tilde{r}_{t+1} + u_{t+1}$  の分析が問題である。Britten-Jones [3] では被説明変数が多変量正規分布に従うことが仮定されている。しかし、管理ポートフォリオの収益率からなる  $\tilde{r}_{t+1}$  は必ずしも多変量正規分布に従うとは限らない。よって、Britten-Jones の結果を正規性を持たない場合に拡張することが今後の課題となる。

(麗澤大学准教授)

### 参考文献

- [1] Y. Ait-Sahalia and W. Brandt. Variable selection for portfolio choice. *Journal of Finance*, 56: 1297-1351, 2001.
- [2] M. W. Brandt and P. Santa-Clara. Dynamic portfolio selection by augmenting the asset space. *Journal of Finance*, 61: 2187-2217, 2006.
- [3] M. Britten-Jones. The sampling error in estimates of mean-variance efficient portfolio weights. *Journal of Finance*, 59: 655-671, 1999.
- [4] J. H. Cochrane. *Asset pricing*. Princeton University Press, revised edition, 2005.
- [5] E. R. Engle, D. M. Liliien, and R. P. Robins. Estimating time varying risk premia in the term structure: The ARCH-M model. *Econometrica*, 55: 391-407, 1987.
- [6] L. P. Hansen and S. F. Richard. The role of conditioning information in deducing testable restrictions implied by dynamic asset pricing models. *Econometrica*, 55: 587-613, 1987.

## Summary

Variable selection for the mean-variance portfolio selection problem

Shoji Kamimura

In this paper, we study the conditional mean-variance portfolio selection problem. Following the work of Brandt and Santa-Clara (2006), we investigate which variables are important for the optimal portfolio weight. We use as state variables the dividend-price ratio, the term spread, and the trend variables in Japanese market. We find that the dividend-price ratio explains the optimal portfolio weight, but the others do not.

(受付 平成21年11月19日)  
(校了 平成22年1月22日)