2016 年 3 月 14 日提出

麗澤大学大学院 経済研究科 博士課程

学位請求論文

『 不動産の非流動性を考慮した
長期多段階ポートフォリオ選択の方法に関する研究 』

氏名	鈴木　英晃
学籍番号	1141410029
指導教員	高辻　秀興

目次

序章　研究の目的 1

1　不動産の非流動性に関する先行研究と本研究の位置づけ 5

1.1　不動産の分散効果に関する知見の整理 5

1.2　不動産の非流動性 7

1.2.1　経済学での流動性プレミアム 7

1.2.2　価格形成における非流動性（保有期間が固定化された債券金利の期間構造) 7

1.2.3　不動産の市場滞留時間 8

1.2.4　非流動性が不動産価格に与える影響 10

1.2.5　長い取引プロセスによる機会コスト 11

1.2.6　その他の価格変動リスク 12

1.3　ポートフォリオ分析における不動産の非流動性の取り扱い 14

1.4　ポートフォリオ分析モデル 19

1.4.1　先行研究と一期間モデル 19

1.4.2　投資家効用とその理論的整合性 20

1.4.3　これまでの不動産を含む長期ポートフォリオ研究 22

1.4.4　投資家の多段階意思決定 23

1.5　投資家のリスク回避度 24

1.6　本研究の位置づけと方法 27

2　不動産リターンが持つ Non-i.i.d.過程の時系列的解明 29

2.1　本章の目的 29

2.2　Cheng らの指摘する Non-i.i.d.過程 29

2.2.1　Non-i.i.d.過程が問題となるとき 29

2.2.2　Non-i.i.d.過程と分散 30

2.2.3　Non-i.i.d.過程の計測 31

2.3　日本データでの検証 34

2.3.1　研究データ 34

2.3.2　分析結果 36

2.4　仮設データによる解明 39

2.4.1　分析手法 39

2.4.2　分析結果 40

2.5　ここまでの整理と時系列分析の必要性 48

2.6　単位根検定からみる不動産の i.i.d 過程 48

2.6.1　検定の方法 48

2.6.2　検定結果の解釈 49

2.7 時系列モデルによる予測誤差の検証 51
2.7.1 ARIMA 過程によるモデル化 51
2.7.2 GARCH によるボラティリティ変動分析 56
2.7.3 単位根検定・ARIMA モデル・GARCH モデルの再検討 60
2.8 本章のまとめ 69

3 ポートフォリオ選択における不動産と他の複数資産の多変量時系列分析 70
3.1 先行研究の整理 70
3.2 研究データと分析方法 71
3.2.1 研究データとその性質 71
3.2.2 共和分関係の検定 71
3.2.3 モデルの決定：ベクトル誤差修正モデル 72
3.3 分析結果 74
3.3.1 グレンジャーの因果性 74
3.3.2 インパルス応答解析 75
3.3.3 予測誤差の分散分解 76
3.3.4 考察 77
3.4 本章のまとめ 78

4 流動性擬制化でのリスク回避係数別の長期ポートフォリオ選択 90
4.1 分析手法 90
4.1.1 ウィンドウ移動型平均分散モデル 90
4.1.2 リスク回避係数の導入 91
4.2 研究データとリスク回避係数 92
4.2.1 研究データ 92
4.2.2 不動産投資指数 93
4.2.3 リスク回避係数 94
4.3 分析結果 95
4.3.1 リスク調整済み収益率（RAR）の時系列変化 95
4.3.2 不動産投資配分比率の時系列変化 95
4.3.3 リスク回避係数別投資家への影響 98
4.4 本章のまとめ 99

5 不動産の非流動性を考慮した長期多段階ポートフォリオ選択の方法 108
5.1 先行研究における不動産の非流動性の取り扱い 108
5.2 不動産の非流動性を考慮した 2 資産モデルの概要 109
5.2.1 モデルの目的と問題設定 109
5.2.2 モデルの概要 110

5.3 投資家の期待効用（目的関数）の加法分離型効用への変換 113
5.3.1 長期ポートフォリオリターンの加法分離型への変換 113
5.3.2 原資産リターンによるポートフォリオリターンの近似 114
5.4 Non-i.i.d.過程の取り扱い 115
5.5 動的計画法によるモデルの解法 116
5.6 数値データによる 2 資産ポートフォリオ選択の分析 119
5.6.1 仮想的な将来想定の下での分析 119
5.6.2 設定データの内容とねらい 119
5.6.3 分析結果 120
5.7 実データを将来想定としたときの最適ポートフォリオ 122
5.7.1 設定データの内容 123
5.7.2 取引費用の設定に関する考察 124
5.7.3 取引費用のケース設定と解の特徴 126
5.7.4 主要な取引費用ケースにおけるリスク回避度別の解の特徴 133
5.7.5 考察 134
5.8 市場滞留時間のモデル化 136
5.8.1 モデル化に関する考察 136
5.8.2 逸失利益による TOM のモデル化 137
5.8.3 分析結果 139
5.8.4 bid/offer 戦略のモデル化への期待 140
5.9 本章のまとめ 143
6 結論と今後の展望 151
参考文献 157
謝辞 160

序章　研究の目的

問題意識

本論文は,不動産の非流動性を考慮した長期多段階ポートフォリオ選択の方法に関する研究を行うものである。非流動性資産クラスとしての不動産を，全体ポートフォリオの枠組みでいかに適切に取り扱うのかを探求するものであり,今後期待されるポートフォリオの高度運用化に資することを目的としている。

さて，人々の資産は，様々なライフステージそしてリスク回避度に応じて，多様な形となる。これら資産の運用は，若年期・家族世帯における資産形成から老後の貯蓄まで，効果的な運用がなされることで人々の富の形成と持続を助長する。運用資産は個人により直接保有運用されるものから運用者に任せられる大規模なポートフォリオといった,いわゆる機関投資化しているものまで幅広い。

現代ポートフォリオ理論(MPT)の発展により，様々な資産を組み合わせた複数資産ポートフォリオ（マルチアセット・ポートフォリオ，以下ポートフォリオ）による高度な資産運用が進んできた。MPT における代表的な貢献として Markowitz (1952)の平均・分散モデルがある。これは異なるリターン変動をもつ資産同士を組み合わせてポートフォリオ構築することによりリスクの分散を図るという考えであり,投資家及び資産運用者がいかに運用戦略をたてるべきかを提案したものである。不動産も資産クラスの一つとしてポートフォリオに組み込まれ，その分散効果は学術と実務の両方で報告されてきた。

しかし,不動産はポートフォリオのリスク分散役として戦略的な位置づけとして有益になる場合（例えば，後述の Lee, 2003，Lee & Stevenson, 2006，Lee, 2005）がある一方で，不動産投資の特徴として投資単位の大きさ・取引費用の高さ・流動性の低さなどの投資クラスとしての扱いづらさが指摘される。特に非流動性と呼ばれる不動産固有の性質つまり「高い取引費用と売却時の市場滞留時間とがもたらす非流動性」を考慮した研究となると限られてくるのが実情であり，未だにその問題をポートフォリオ選択で取扱う研究は十分とは言えない。

近年においては Cheng *et al.*(2013)がポートフォリオ選択のなかで不動産の非流動性をはじめて考慮し，その貢献により不動産を含むポートフォリオ分析は前進を見せた。しかし，まだ課題があるのも事実である。投資家は一般に流動性選好があると言われている一方，不動産は非流動的である。ポートフォリオ運用における不動産の非流動性とは「流動性資産に変換して即時的に運用することができない」ことと定義できるよう。即座に他の資産へ変換することのできない特性は，ポートフォリオ内での不動産への資産配分に大きな影響を及ぼすため，適切な理解が必要となる。Cheng *et al.* (2013)の研究手法はあくまでも一期間モデルの拡張型にしか過ぎず，動学的最適化をもっての多段階複数期間モデルとはなっていない。従って，次のステップとしてはこの複数期間モデルへの発展が望まれるところである。

さらに，不動産を含むポートフォリオ分析は，投資家の目線から行う必要がある。リスク回避度は投資家のポートフォリオ選択において支配的な役割を持っているといって良い。しかし，同回避度については，過去現存する全ての不動産ポートフォリオ分析で，接点ポートフォリオか最小分散ポートフォリオのように強い仮定を置いたものばかりであった。これでは，リスク回避度が軽視され，実際の投資家の目線に分析結果があっていない恐れがある。つまり，課題は山積みなのである。

研究の枠組み

本研究はこうした問題意識の下に，国民の資産を運用する機関投資家の立場に立って，不動産を含むポートフォリオ選択の評価方法について，より実際の投資家の目線にあうよう発展させることにある。具体的には，本研究の目的は Cheng *et al.*(2013)の研究方法を長期複数期間モデルへ発展させることにある。

本研究の枠組みは，あくまで不動産の非流動性を考慮した長期多段階ポートフォリオ選択の方法に関する研究である。つまり，不動産の役割やあり方について焦点をあててはいない。本文中にはもちろん実際のデータを用いて知見を得た部分もある。しかし一番の目的は，非流動性を考慮する際に最も重要な「不動産をいつどれだけ取得し手放す必要があるのか」という質問に，定量的に答えられるようモデル構築を試みることにある。これを通じて，今後のポートフォリオ研究の発展に寄与することが本研究に設定された到達地点である。

日本における不動産を含むポートフォリオ研究の発展に向けて

本研究では，分析データについては日本のものを使う。本研究の分析データも Cheng *et al.*(2013)との整合性を図るため彼ら同様 US データを用いることが自然であろう。しかし，ここでは日本の不動産投資データを用いて分析を進めている。これは日本の不動産ポートフォリオ研究発展への貢献をはかるためである。日本の不動産ポートフォリオ研究はけっして多くはなく，残念ながら他の先進国と比較しても後れを取っている状態である。ひとつの大きな理由には国内投資家は伝統的資産への投資が主流であるために，ポートフォリオ研究が不動産に目を向けていなかったことにあるといってよいだろう。

日本国内においては，伝統的資産である株式や債券によってポートフォリオを構築することが一般的である。それ以外の資産クラスが含まれることは少なく，不動産に資産配分を行う投資家はあまり多くはない。このことについては様々な意見が多い。内閣官房(2013)がまとめた「公的・準公的資金の運用・リスク管理等の高度化等に関する有識者会議」の報告書によると，運用目標及び方針に関して，①国内債券型ポートフォリオの見直し，②収益目標・リスク許容度の設定③運用コスト等④余裕金の運用方法，が提案された。

同報告書が指摘するように，日本の公的準公的年金基金のポートフォリオは，国内債券に偏ったポートフォリオを持ち，収益目標も低く設定されている傾向にある。しかし，今後のデフレ脱却とリスク資産選好への期待も鑑み，今後は長期的な視点にたった上で，収益・リスク許容度の設定，運用余裕資金の運用方法そして適切な運用コスト等の配慮が必要である，と同報告書は提案した。また，同報告書は，現在よりも高度な運用にあたって，国内債券型ポートフォリオからの脱却を含め，さらにポートフォリオ運用対象資産の多様化させること，つまりオルタナティブ資産（以下，オルタナ資産）をも導入していくことを提案している。つまり，伝統的資産である株式や債券のみならず，オルタナ資産と呼ばれる領域への拡張を行うことにより，運用の高度化を図ることとしている。これは，様々な低相関の資産を組み合わせることにより，安定した（変動の少ない）運用を図れるという MPT の枠組みによるものでもある。

オルタナ資産と呼ばれるもののなかには，様々なものがあるが，代表的なものとして不動産投資，プライベート・エクイティ投資等のような非流動性資産であることが多い。本研究の対象ともなっている不動産はその中でもリアルアセット（実物資産）に分類され，伝統的資産のようなペーパーアセットとは異なる扱いを受けている。不動産への投資方法としては，実際に運用する直接投資と，ファンドを経由する間接投資がある。REIT は不動産を原資とする市場性資産クラ

スであるが, REIT という独立した資産クラスとして不動産とは区別して認識されることも多い。

これら不動産を含むオルタナ資産を通じた運用の高度化が期待されているが, 他方ではマルチアセット・ポートフォリオ内におけるオルタナ資産への投資実績は，日本において未だ少なく，知見として蓄積されていないのも事実である。本稿の関心対象とする不動産にあっては，ポートフォリオ内部でのオルタナ資産アロケーションが海外の基金では一般的に行われているものの，日本における公的準公的資金がもつ不動産アロケーションは未だに少ない。

不動産は現在オルタナ資産の一つとして認識されている一方で，その市場規模の大きさから，高度化されたポートフォリオに今後組み込まれていくことが予想される。日本の不動産投資市場全体は 2011 年時点において，2 兆 6,780 億米ドルと試算され，調査を行った 55 市場のなかで US（6 兆 7,530 億米ドル）に次ぐ第二位という結果であった(Pramerica, 2012)。さらに 2013 年度時点における，日本の投資可能な不動産投資市場（investible market）の規模は，7,078 億米ドルであると試算され，ここでも調査対象となった 25 カ国中において，US の 2 兆 2,379 億米ドルに次ぐ第二位の規模である(IPD, 2014)。Lieser & Groh (2013)の結果報告にもあるとおり，不動産投資機会，資本市場の洗練さと奥行き等が，不動産投資の決定要因として最も影響の大きなものであることからも, 投資機会の十分にある不動産が今後日本の機関投資家のポートフォリオ内に配分されていくことは自然であるといえる。つまり，いま日本の不動産投資データを使ってポートフォリオ研究を行うことの意義は大きいのである。

論文の構成

本研究論文は以下のように構成されている。

まず第 1 章では, 不動産のもつ非流動性とポートフォリオ内でのその取り扱いについて先行研究サーベイを通じて論考を行う。そして，今後の不動産を含むポートフォリオ研究のあり方を整理することにより, 本研究の位置づけを明確化する。特に不動産の非流動性とはなにかを論考し，ポートフォリオ選択での考慮の必要性を強調している。Cheng *et al.*(2013)の革新的な非流動性考慮型モデルを紹介するとともに，その課題点も指摘している。この課題点である長期複数期間モデルへの発展を本研究の目的として位置づけている。さらに投資家のリスク回避度は無視できない影響をもつにも関わらず，先行研究においては軽視されてきていることを指摘し，同投資家特性を長期複数期間ポートフォリオのモデル化の際に組み込むこととしている。

第 2 章では，長期複数期間ポートフォリオモデルの構築に先立ち，Cheng *et al.* (2013)の指摘した不動産リターンの Non-i.i.d.過程について分析した。彼らのモデルでは同過程に支配的な役割を与えており，ここではその正当性を議論した。結論としては，彼らが Non-i.i.d.過程としているものは単位根かまたはそれに似た分布であることがわかった。そこで ARIMA によるモデル化を実施し予測誤差の程度を調べた。確かに彼らの結果通り予測誤差は過大となってしまうものの，しかし，不動産が独立で暴走するような資産であるのか，という新たな疑問を提起した。つまり，他の資産は影響を及ぼしていないのか，という疑問である。

第 3 章では，この疑問を解明するため，不動産を他の複数資産とともに多変量時系列分析を実施した。その結果，不動産リターンは他の資産でも説明できる部分があり，Cheng *et al.* (2013)が支配的役割をモデル内で与えるほどに独自の動きを見せる資産ではなく, 彼らの主張の正当性を確かめるには，追加的な分析が必要であることを指摘した。

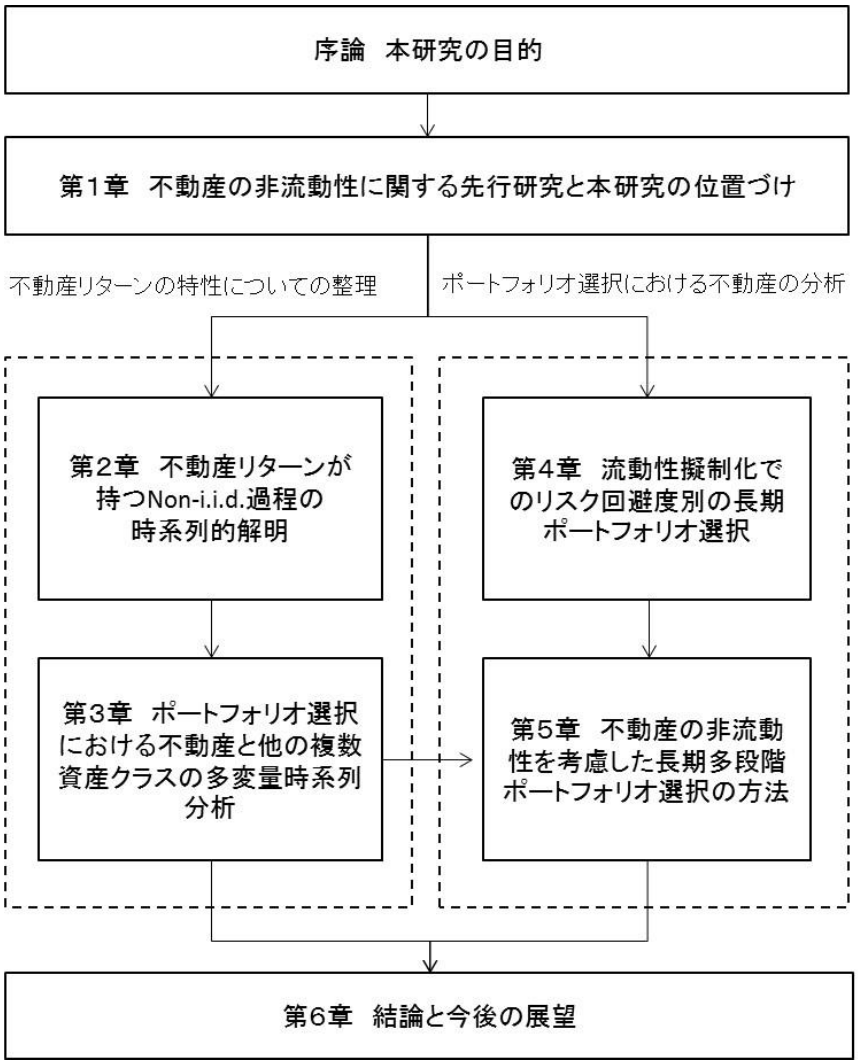
第 4 章では，次章でのモデル化に先立ち，また次章分析の比較対象として，ひとまず流動性を擬制化した状態でのポートフォリオ分析を行った。国外の先行研究で，こうした非流動性を考慮

しない単純な平均･分散モデルの適用は不動産への過剰配分を惹き起こすと指摘しているが，これを日本においても見ることができた。

第５章ではついに長期多段階ポートフォリオモデルを構築して，理論的かつ実証的に，非流動性がポートフォリオ選択に与える影響について分析を行った。仮想パラメータを用いたものではあるが，取引費用と市場滞留時間という非流動性要因がポートフォリオ選択に与える影響についての知見を得ることができた。

第６章では，本研究で得られた知見をまとめ，そして同モデルによる新たな研究の展望について述べている。

図：研究のフローチャート



1　不動産の非流動性に関する先行研究と本研究の位置づけ

不動産は，機関投資家の政策アセットミックスにおいて戦略的位置付けとして，マルチアセットクラス・ポートフォリオ（以下，ポートフォリオ）に組み込まれることは世界的にも多い。それゆえに，不動産の役割は現代ポートフォリオ理論の枠組みで過去様々な角度から世界各国で分析がなされてきた。先行研究で得られた知見は，実務の投資運用でも参考とされており，それら貢献は大きい。

しかし，未だに不動産の大きな特性の一つである非流動性をポートフォリオ選択において取り扱う研究は十分とは言えない。投資家は一般的に流動性選好があると言われている一方，不動産は非流動的である。ポートフォリオ運用における不動産の非流動性とは「流動性資産に変換して即時的に運用することができない」ことと定義できるよう。即座に他の資産へ変換することのできない特性は，ポートフォリオ内での不動産への資産配分に大きな影響を及ぼすと考えられるため，適切な理解が必要となる。さらに，これは非流動性のため従来の一期間平均分散モデルの結果を単純に長期の将来に敷衍して解釈することができないことも示唆する。つまり自ずと長期保有を考慮したポートフォリオの構築方法が，不動産を含むポートフォリオ選択の前提となってくる。多くの先行研究はこの長期保有を必ずしも想定をしておらず，これは採用した手法からも見て取れる。しかし，近年のいくつかの先行研究は，同特性を考慮してのポートフォリオ分析の在り方について議論を進めており今後同領域の発展が期待できる。

本章の目的は，不動産のもつ非流動性と長期ポートフォリオ内でのその扱いについて先行研究サーベイを通じて論考を行い，今後の不動産を含むポートフォリオ研究のあり方を整理することにある。つまり先行研究の知見の整理に軸を置いておらず，この不動産の非流動性をいかにポートフォリオ分析に組み込んでいくのかという技術的な視点に立っており，非流動性の理論的背景と分析手法に焦点を当てている。本取り組みを通じて，本研究の位置づけを明確に整理することが狙いである。

1.1　不動産の分散効果に関する知見の整理

早くに行われた米国の研究(Ibbotson & Siegel, 1984)[1]では，複数資産ポートフォリオにおける不動産の基本的な役割を分析した。1960 年から 1982 年の期間において「不動産は株式と国債に対しあまり相関していない。不動産は物価変動率と高い相関を得ており，他の資産クラスよりも（トレジャリー・ビルを除き）物価変動の良い回避手段である」と報告した。この研究は不動産をポートフォリオに組み込むことの有益性を示唆したものである。

Lee (2003)[2]は，どのような場面で不動産がポートフォリオのパフォーマンスを改善するのかを英国のデータ（1977 年から 2002 年）を用いて研究した。不動産は約 70%の場合に，ポートフォリオのリターンを損なうが，不動産は“ダウンサイド”においてパフォーマンスを改善したことを報告した。

[1] Ibbotson, R., & Siegel, L. (1984). Real Estate Returns: A Comparison with Other Investments. AREUEA Journal, Vol. 12 (No. 3), pp.219-242.

[2] Lee, S. (2003), When Does Direct Real Estate Improve Portfolio Performance?, Working Papers in Real Estate & Planning, 17/03, University of Reading

また, Lee & Stevenson (2006)[3]は, 最適ポートフォリオが時間や運用期間に応じて変化する中で, 不動産を組み入れる効用がどの程度の継続性を有しているのかを研究した。不動産, 株式, 国債, トレジャリー・ビルを 1977 年から 2002 年までの英国のデータを用いて分析を行った結果，以下のようなことが指摘された。リターンを改善する場合やリスクを減少させる場合も含め，不動産は 5 年から 25 年の運用期間を通して最適ポートフォリオに組み込まれた。運用期間が長期化するほど，不動産がポートフォリオに与える影響は良くなっていく傾向があった。不動産は最適ポートフォリオ内の様々な場面に応じて収益改善手段やリスク分散手段としての地位を変えていく。不動産の最適ポートフォリオ内におけるリターン改善としての役割はリスク分散としての役割よりも低い。この研究は，不動産はリスク分散役として，複数資産ポートフォリオ内で長期間保有される投資戦略において有益であることを示唆した。

実際に複数資産ポートフォリオで構成されている配分比が異なれば, 不動産を追加して得られる効用は異なることも報告されている。Lee (2005)[4]は，実際に保有されている複数資産ポートフォリオは必ずしも効率的に構築されているとは限らないとの考えから, 意図的に非効率なポートフォリオを作り出し，そこへ不動産投資を追加することでその影響を調べた。1952 年から 2003 年までの，不動産，大規模資本株式，小規模資本株式，長期国債，長期社債の米国データが用いられた。その結果，不動産を既存の非効率と仮定したポートフォリオへ組み込む場合，ほとんどの場合でその効用が認められたものの，際立った利益をあまり見出すことはなかった。さらにその効用は既存のポートフォリオの構成に応じて変化することもわかった

これらの知見は，不動産を含んだ複数資産ポートフォリオの構築・管理を考える上で重要である。しかし，これらは日本国外で得られたものがほとんどであり，日本国内の事例を用いて行われたものは筆者の見るところあまり見当たらない。これは①日本の大規模な機関投資家が不動産投資を積極的に行ってこなかったことから議題にあまりあがらなかった，②総合投資収益という一貫した視点から複数資産への投資を評価する姿勢が希薄であったこと，また③我が国の不動産投資指数が十分なデータを確保し開示できていなかったことが背景にあると考える。

Moroney & Naka (2006)[5]・鈴木・高辻(2013a)[6]は，効率的フロンティア及び最小分散点におけるポートフォリオ選択について日本の不動産について報告した。Moroney & Naka (2006)が日本においてもポートフォリオ内部に不動産を持つことの分散効果があることを，価値変動（いわゆるキャピタルリターン）の観点から報告した。その後，鈴木・高辻(2013a)が，価値変動のみならず，ようやく収入面（インカムリターン）も加えたトータルリターンを用い，不動産が最小分散投資ポートフォリオ内に占める資産配分割合の経年変化性について研究し，以下のことを指摘した：①金融危機の影響下においても分散効果が得られていたが，平均リターンは押し下げる結果であったことから, リターン改善としての役割よりもリスク分散の役割を担う資産であるといえる。②また，不動産は異なる保有期間において常に最小分散ポートフォリオへ組み込まれたが，そ

[3] Lee, S. & Stevenson, S. (2006), Real Estate in the Mixed-Asset Portfolio: The Question of Consistency, Journal of Property Investment & Finance, 2006, 24:2: pp.123-135.

[4] Lee, S. (2005). The marginal benefit of diversification in commercial real estate portfolios. Working Papers in Real Estate & Planning. 04/05. Working Paper. University of Reading, Reading, p.11.

[5] Maroney, N. & Naka, A. (2006), Diversification Benefits of Japanese Real Estate Over the Last Four Decades, Journal of Real Estate Finance and Economics, Vol. 33, No.3

[6]鈴木英晃・高辻秀興 (2013a), 最小分散ポートフォリオでの不動産投資の分散効果ダイナミクス, 不動産学会学術講演会論文集: 第 29: pp.13-20

の資産構成比には時間的変動があり,長期保有するとその変動幅は小さくなったこともわかった。つまり分散効果は常に一定の効果で推移するものではなく,時期によって変動していることを示唆する。これはポートフォリオを構成する不動産と他資産の相対的関係性が絶えず変化しているためである。

1.2　不動産の非流動性

ここでは，まず不動産の非流動性について考えていく。非流動性資産の特徴は，文字通りその流動性の低さにある。流動性は換金性とも言い換えることができ，市場での売出しから売却までの滞留時間によって判断することができる。滞留時間が短ければ流動性（換金性）が高く，滞留時間が長ければ流動性が低い。非流動性は,ポートフォリオ構築において重要な意味を持つため,以下論考していきたい。投資ポートフォリオを主たる研究対象としていることから，以下「流動性プレミアム」という視点から議論していく。

1.2.1　経済学での流動性プレミアム

まずは経済学での流動性プレミアムの考えかたを小野(2009)[7]に従い整理する。そもそも貨幣はいかなる場面においても何らかの財と交換することのできる即時交換機能を持っている。この機能を一般的に流動性と呼ぶ。この貨幣という資産が与える効用は二つに別けて考えることができる。一つは,「保有すること」による流動性の効用と,「消費すること」により発生する消費の効用である。ここで，実質貨幣量mの単位期間保有する効用$u(m)$の，限界効用を$u'(m)$とする。そして実質消費量cの単位期間保有する効用$u(c)$の，限界効用を$u'(\mathrm{c})$で表す。すると，一単位当たりの貨幣量増加は，以下の式で表せるように，効用増加があったものと考えることができる。これが流動性プレミアムlである。また，投資家は，収益性と流動性を見比べて意思決定を行うため，収益性Rと流動性プレミアムlは理論上均衡となる。つまり，資産選択を行う際には，この収益性と流動性プレミアムを意識しながら投資家は行動を行っていることになる。従って，流動性プレミアムは投資家にとって重要な投資判断要素であるといえる。

$$R = l = \frac{u'(m)}{u'(\mathrm{c})} \qquad (1.2.1.1)^{8}$$

1.2.2　価格形成における非流動性（保有期間が固定化された債券金利の期間構造)

次にこの流動性プレミアムが価格に対して与える影響を考える。まずは簡素化してこれを捉えるため，債券の金利の期間構造理論を考える。債券は金利変動が直接的に価格への影響を及ぼす資産クラスであるため，リスクプレミアム（流動性プレミアム含む）の影響を把握するには有用である。以下，大村(2010)[9]に従い，金利の期間構造を理解していく。純粋期待仮説によると，完全予見市場と無リスク市場を仮定すると，一年物割引債と複数年者割引債Tそれぞれの一年間利回りは鞘取りにより均衡をする。

[7]小野善康(2009). 金融第 2 版. 岩波書店, pp.19-24
[8]ibid.， p.24，(4)式
[9]大村恵一(2010). ファイナンス論. 有意閣, pp.242-247

$$[1+r(t,T)]^{\tau}=(1+r_t)(1+r_{t+1})(1+r_{t+2})\cdots(1+r_{tT}) \qquad (1.2.2.1)^{10}$$

テイラー展開により近似させると，残存期間τでの利回りは，満期までの一年間期間利回りの平均と考えることができる。

$$r(t,T)=\frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{\tau}(r_{t+i}) \qquad (1.2.2.2)^{11}$$

しかし，完全予見市場は現実的ではない。そこで，将来での予測値r_{t+i}^{e}と置き換えると，不確実性を考慮することができる。

$$r(t,T)=\frac{1}{\tau}(r_t+r_{t+1}^{e}+r_{t+2}^{e}+\cdots+r_{T}^{e}) \qquad (1.2.2.3)^{12}$$

この将来予想短期利回りは先物市場を活用することにより設定することができる。これにより将来金利を予測することができ，先物金利$r_{t+\tau,1}$と予想金利r_{t+i}^{e}が一致する。つまり，現実社会においても純粋期待仮説の整合性を得ることができる。

$$[1+r(t,T)]^{\tau}=(1+r_t)(1+f_{t+1},1)(1+f_{t+2},1)\cdots\left(1+r_{t+\tau,1}\right) \qquad (1.2.2.4)^{13}$$

さらなる不確実性がある場合，流動先選好仮説により利回りは変化する。資金が長期的に固定される長期債券では，デフォルトリスクと流動性需要への対応の鈍化を引き起こすことになる。そこで，この犠牲となる流動性がプレミアムとして利回りに追加されることになる。齋藤(2007)[14]によれば，将来スポットレートが，流動性イベントの金利期間構造への影響にさらされているときに，過大評価されることが指摘されている。

理論上，債券の価格は，将来キャッシュフローを割引率で算出した現在価値の総和に等しい。割引率と価格の関係性では，同率が高くなると価格は低くなり，低くなると価格は高くなる。前述の流動性プレミアム（一般的に非負）が加わって割引率が高くなることを考えると，価格が低くなることを容易に想像できる。つまり，流動性プレミアムは一般に価格を押し下げる効果があると考えてよい。

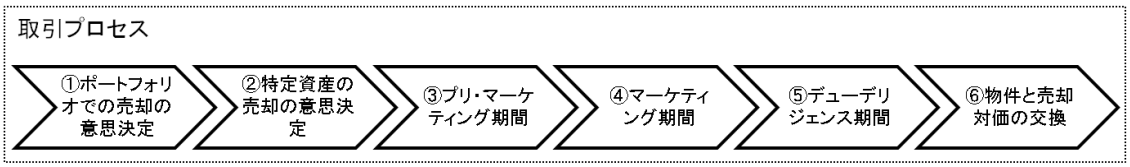
1.2.3　不動産の市場滞留時間

不動産の非流動性に関わる最も大きな要素の一つは，長い市場滞留時間（Time-on-Market，以下 TOM）である。不動産は売却意思決定から実際の売却完了まで相当程度の時間を要する。この TOM は，ポートフォリオ運用の視点からは，不動産を他の資産クラスへと変換して運用でき

[10] ibid.，p.245，(13-6)式
[11] ibid.，p.245，(13-7)式
[12] ibid.，p.245，(13-8)式
[13] ibid.，p.245，(13-9)式
[14] 齋藤誠(2007). 資産価格とマクロ経済．日本経済新聞出版社, pp.283-300

る速度ともいえ，この速度が遅いことによって運用の機敏な方向転換を阻害する要因となる。

McNamara (1998)[15]は不動産取引プロセスを 3 つの主要段階にわけて定義した。まず①特定の資産を売却すると決定し,そして主要な契約内容が買主と売主の間で取り決められる期間である。つぎに②正式な契約書が取り交わされるまでの期間，そして最後に③売買金額と売却物件が交換される時点である。McNamara は UK の市場参加者に対して，それぞれの段階に費やす時間を調査した。第一段階のマーケティング期間では，様々な不動産タイプにより違いはあるもののおよそ 4－8 週間かかることがわかった。第二段階のデューデリジェンス期間では，特定の不動産タイプ（ショッピングセンター）で例外はあるものの，4－8 週間ほど費やす。最終段階であるセトルメント期間には 1 週間ほどかかることがわかった。Hordijk & Teuben (2008)[16]もオランダでの場合として，同様に取引プロセスを分析し，この段階をさらに細分化している。



①　特性のセクター（又はサブセクター）売却の不動産ポートフォリオでの意思決定の期間

ポートフォリオ全体からの意思判断である。複数資産クラスへ投資を行っているポートフォリオ運用者にとって，これは不動産ポートフォリオのみならず，マルチアセット・ポートフォリオ内で，ALM や戦略的視点により決定される。

②　特定の資産を売却する意思決定の期間

ポートフォリオ内での対象資産についての「運用継続」又は「売却」が検討のうえ決定される段階である。

③　プリ・マーケティング期間

株式市場や債券市場のように高い価格情報の透明性を持たない不動産市場では,マーケティングを開始する以前に，一定の情報収集期間が発生することがある。同期間において取得した情報が有用であるほど，後のデューデリジェンス期間が短くなることもある。また，売却物件を担当する不動産仲介業者の選別も行われる期間でもある。

④　マーケティング期間

実際に売却対象物件が，市場においてマーケティングされ，主要な契約条項について同意が得られた時点までの期間である。市場の状況によって左右されやすい期間でもある。また，個別案件間により大きな差がでてしまう場合も多い。例えば，テナント不在の空室オフィスビルと満室のオフィスビル，満室のショッピングセンターでは市場での需要が異なってくる。

---

[15] McNamara, P. (1998). Exploring Liquidity: Recent Survey Findings. Paper to 7th IPD Conference, Brighton, November

[16] Hordijk, A. & Teuben, B. (2008). The liquidity of direct real estate in istitutional investors' portfolios: The Netherlands. Journal of Portfolio Investment & Finance. Vol. 26 No. 1. pp. 38-58

⑤　デューデリジェンス期間

売却が決定した後に，最終的な契約条項を決定させる際に購入者が費やす調査期間である。同期間を通じて瑕疵が見つかった場合などは，売却価格が変化する可能性もある。

⑥　物件と売却対価の交換

既に確定された契約内容に基づき，最終的に物件と対価を交換することにより売却プロセスが完了する段階である。

これらを定量的に理解するため Bond & Hwang (2004)[17]は，取引プロセスに内在する流動性リスクは次のように二つのファクターに分けて考えた。まず①過去から得られる Ex post なリターン分散と，②不確実な Ex ante でのリターン分散である。つまり不動産リターンの Ex post 要因考慮済リターン変動は，過去のリターン変動と最終的な保有期間（マーケティング期間含む）によって表すことができる。ここでのマーケティング期間は，売却までに費やす全体期間の期間と考える。次にマーケティング期間の不確実性を考慮し，Ex ante 型変動を得る。同不確実性は，「一最終保有期間単位当たりのマーケティング期間の分散」と「一リターン分散単位当たりの平均リターン」によって，前述の Ex post 変動を修正して算出する。これは，長い取引プロセスにより期待したリスクから乖離することを意味する。同様に，これは期待するリターンからの乖離の可能性も含むことになる。

$$\mathrm{Var}^{ex\ post}(r_{t+s}) = (t+m) \times \sigma^2 \tag{1.2.3.1}$$

$$\mathrm{Var}^{ex\ ante}(r_{t+s}) = \left(\frac{\mu^2}{\sigma^2} \times \frac{\sigma^2(m)}{(t+m)} + 1\right) \times \mathrm{Var}^{ex\ post}(r_{t+s})$$

$\mathrm{Var}^{ex\ post}$: 流動性を考慮した不動産リターンの ex post 分散
$\mathrm{Var}^{ex\ ante}$: 流動性を考慮した不動産リターンの ex ante 分散
t: 取引プロセス，μ: 平均リターン
m: 平均マーケティング期間
$\sigma^2(m)$: マーケティング期間の分散
t: 保持期間，r: 不動産リターン　　(1.2.3.2)

1.2.4　非流動性が不動産価格に与える影響

実際の投資での流動性の影響についてはリアルオプションからのアプローチが有用である。リアルオプションでの流動性の扱いについては前川(1999)[18]に従う。流動性コストは二つの要件にわけて説明することができる。不動産の取引コストと，市場に依存するコストである。前者は不動産の高い取引コストなどの金銭的コストと，時間コストなどの非金銭コストにわかれる。市場

[17]Bond, S.A. & Hwang, S. (2004). Liquidity risk and real estate: a quantitative approach to assessing risk, paper presented at Liquidity in Commercial Markets, Investment Property Forum, London
[18]前川俊一(1999). 不動産投資分析論. 清文社, pp.284-290

依存コストは，取引がなされるまでに価格が下がるリスクであり，売却までの期間にかかる融資コスト等も含まれる。これら流動性コストが売却オプションに与える影響を計測することにより計量的に検討することができる。

まずは不動産の価格形成について考える。まず注目したいのは，売却までに不確実な市場依存型の流動コストである。ある時点 *n* の不動産価格は，「無リスクでの現時点の継続保有価値を n 時点へと考慮した価値」と「n 時点での継続保有価値と不確実な将来での売却に基づいた不動産価値の差額」を合計したものとして定義できる。

さらに，不動産価格の変動を考える。$\alpha(S,n)$は，不動産価格傾向を示すドリフト係数であり，$\sigma(S,n)$: ディフュージョンである。dzはウィーナー過程に従うと考える。つまり，不動産価格の変動は，資産そのものが持つ変動と，短期変動により構成されていると考えることができる。

$$S = e^{in} \cdot V_S^h(0,T^*) + \left\{V_S^s(n,s^*) - V_S^h(n,T^*)\right\}$$
$$dS = \alpha(S,n) \cdot dn + \sigma(S,n) \cdot dz$$

S: n 時点の不動産価格，i: 無リスク利子率
$e^{in} \cdot V_S^h(0,T^*)$: 無リスク利子率で補正を施した保有継続に基づく不動産価値
$V_S^h(n,T^*)$: 保有継続に基づく不動産価値
$V_S^s(n,s^*)$: 不確実な将来売却に基づく不動産価値

(1.2.4.1)[19]

さらに同式を，Black-Scholes オプション計算式に当てはめる。このとき，権利行使日が確定していることと流動性コストの発生を仮定する。現時点での権利行使価格は，不動産価格と売却を考慮した不動産価値と相対的な推移をしめし，流動性コストが増大すれば権利行使価格は減少する。このリアルオプションによる説明からも，流動性コストが価格に与える影響は明らかである。

$$C(S,\tau,E_0) = S \cdot N(d_1) - E_0 \cdot N(d_2)$$
$$E_0 = V_S^h(0,T^*) + TC(0)$$
$$d_1 = \frac{In\left(\frac{S}{e^{in}E_0}\right) + (i + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2) \cdot \tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

(1.2.4.2)[20]

E_0: 現時点での権利行使価格
$e^{in}E_0$: 権利行使時点での権利行使価格
τ: 権利行使時点，$TC(0)$: 現時点の流動性コスト
σ: 不動産価格の標準偏差，$N(d_1)$, $N(d_2)$: 標準正規分布関数

1.2.5　長い取引プロセスによる機会コスト

長い TOM は「流動性資産に変換して即時的に運用することができない」ことを示唆する。ポートフォリオの運用者は，株式や債券などの他の資産との比較の上に，不動産投資を決定する。不動産から他の資産へのスイッチも同様に機会費用を勘案の上に決断される。しかし，これは不

[19] ibid.，p.288 ⑪式
[20] ibid.，p.289 ⑫式

動産の長い取引プロセスによって悪化されてしまう。不動産の売却が決定し，売買契約が締結された後も，物件の引き渡しまでに一定の時間を要することとなる。そのため，素早く換金はされず，この間に投資を他資産へ切り替えて得られるはずであったリターンを逃すこととなる。これは Hordijk & Teuben (2008)に従うと次式のように表すことができる。取引が完了するまでの間，不動産からインカムを得ることが可能であるが，（この場合は最も流動性の高い資産クラスとして）株式へ投資を開始していることにより得られたであろうリターンを犠牲にすることとなる。

$$Opportunity\ Effect = E_t - (TR_{TOM} + IR_{TOM})$$

E_t: 取引期間にわたる株式トータルリターン　(1.2.5.1)
TR_{TOM}: 契約条項が確定するまでの不動産トータルリターン
IR_{TOM}: 売却が完了するまでのインカムリターン

1.2.6　その他の価格変動リスク

不動産投資においてはその他にも価格変動リスクが存在する。

鑑定評価の精度に関わるリスク

鑑定評価の精度は売買の意思決定とその結果に対して影響を持つ。投資家が売却（または購入）の意思決定を行う際，鑑定評価に頼ることが多い。これは，①不動産が非流動的であるため価格データが得られづらいこと，そして②不均質性により，物理的に同じ物件が二つと存在しないため，プロキシーを採用する必要があるためである。鑑定評価は，不動産価格の専門家である鑑定士の意見であり，市場価格のプロキシーである。

鑑定評価は，その有用性が広く様々な場面で持ちいれられている一方で，正確性については多くの問題が議論されてきた。鑑定評価の代表的な問題として平滑化と時間差があり，これは市場で実際におこっている変動を上手く追跡することができていないという特性である。Clayton *et al.* (2001)[21]は平滑化について次のように報告した。USの個別不動産の鑑定評価額には市場と比較して３四半期の遅れがあり，同じ不動産を継続的に評価している不動産鑑定士は，以前の評価価格をアンカリングすることにより古い情報を使用する傾向がある。

McAllister *et al.* (2003)[22]は，鑑定士の動向とその行動が原因となった平滑化について報告した。鑑定会社とのインタビュー調査の結果, 不動産の価値が減少していることが市場で読み取ることができているものの，市場から得られる動向証拠market evidenceが欠如している場合に，次の三つのシナリオを用いて主に評価額の調整を行う傾向を指摘した：①調整をしない，②調整を遅れて行う，③保守的に調整を行う。さらに彼らのクライアントは“変動”に対して用心深く，遅い調整を好むこともインタビューの結果から得られた。McAllister *et al.*はこの鑑定士の行動と評価の関係について計量分析をおこなっている。月次不動産指数を用いて，評価額の変動がそれぞれの四半期月（3月，6月，9月そして12月）によく見られ，その他の月よりも大きく変化することを指摘した。これは，いくつかの評価会社は毎月市場の情報を更新していると答えた一方で，

[21] Clayton, J., Geltner, D., & Hamilton, S. W. (2001). Smoothing Commercial Property Valuation: Evidence from Individual Appraisals. Real Estate Economics , V29 (3), pp.337-360.
[22] McAllister P., Baum A., Crosby N., Gallimore P., and Gray A (2003). Appraiser behaviour and appraisal smoothing: some qualitative and quantitative evidence. Journal of Property Research, 20(3) pp.261-280

他の評価会社が3ヵ月置きに更新していると答えたことと一致する。これらのほかにも，市場で起こった以下のイベントに多くの鑑定士が反応できていなかったことを報告した：1980年代後半の市場盛況，1993年4月の市場回復，3回にわたる印紙税(stamp duty)の改定。つまりこれらの結果から次のようなことが言える。鑑定士は市場の情報が欠如する中で，いかに評価額を市場の動向に見合うように評価額を調整していくかという状況にあり，実際に市場の証拠が得られるまでは控えめに行動をしている。そして中には市場の動向を上手く追跡することのできない鑑定士が数多く存在する。

この誤差に関する研究は US と UK において発展してきた。Carsberg Report (2002)[23]では RICS に対するその提案の一つとして IPD[24]の保有する豊富な運用不動産データを用いて売却価格と鑑定評価額の差を積極的にモニタリングすることで鑑定評価の発展に貢献するべきとし，RICS は 2003 年にこの提案に答える形で，当該「差」に関するレポートを継続発行し始めた。US では Geltner *et al.*(1994)[25]が Russel-NCREIF のデータベースを用いてランダムな個別のエラーは 6%から 13%だと報告した。これら US と UK の研究を追従するかたちで，様々な国でも行われてきた。ナイジェリアでは Ayedun *et al.* (2011)[26]が評価人の不正確さを指摘し，オーストラリアでは Parker (1998)が，オーストラリアの鑑定評価は UK で報告されているものよりも高い精度を保っているが，それでも機関投資家が期待している精度よりも低いことを報告している。

これらの問題が，鑑定評価の信頼性を左右するものであるが，鑑定評価自体を基盤としたサービスに与える影響も指摘されている。例えば，ポートフォリオ分析に頻繁に用いられる不動産指数や地価公示も鑑定評価を基礎としている。指数作成目的のために，個別案件を集合化させた場合，この平滑化問題が悪化することも指摘されている(Brown & Matysiak, 2000)[27]。日本においても同様に，Shimizu & Nishimura(2006）[28]が1975年から1999年の鑑定評価をベースとしている地価公示のデータには大きな平滑化が見られると指摘している。

固有リスク

不動産は不均質性（heterogeneity）を持つ。経済的に似通った物件はあっても，物理的（構造・地理）に全く同一なものは存在しない。これは，不動産という資産クラスを一般化して捉えることの難しさをしめす。これは不動産投資指数の動向を，完全に捕捉することの難しさともいえる。Callender *et al.*(2007)[29]によると，不動産指数を 1%未満の誤差で再現するためには，約 350 物件以

[23] Carsberg, B. (2002). Property Valuations. Report of the RICS Committee. London. Royal Institution of Chartered Surveyors.

[24] 英国 Investment Property Databank 社（現・米 MSCI 社）

[25] Geltner, D., Graff, R. & Young, M. (1994). Random Disaggregate Appraisal Error in Commercial Property: Evidence from the Russel-NCREIF Database. The Journal of Real Estate Research. Vol. 9 (No. 4), pp.403-419

[26] Ayedun C.A., Ogunba O.A. and Oloyede S.A. (2011). Empirical Verification of the Accuracy of Valuation estimates Emanating from Nigerian Valuers: A Case Study of Lagos Metropolis. International Journal of Marketing Studies. Vol.3, No.4; November 2011

[27] Brown, G. R., & Matysiak, G. A. (2000). Sticky Valuations, Aggregation Effects, and Property Indices. Journal of Real Estate Finance and Economics , 20 (1), pp.49-66

[28] Shimizu, C., & Nishimura, G. (2006) Biases in appraisal land price information: the case of Japan. Journal of Property Investment & Finance Vol. 24 No. 2 ,pp.150-175

[29] Callender, M., Deveney, S., Sheahan, A., Key, T. (2007). Risk Reduction and Diversification in UKCommercial Property Portfolios. Journal of Property Research, 24(4), pp.355-375.

上の物件を不動産ポートフォリオ内に持つ必要がある。しかし，不動産の投資規模は大きく，350物件以上の不動産を保有することは経済的に困難である。Lee (2005b)[30]によると，物件数の増加に伴う運用コストを考慮すると，実際に保有すべき物件数は，学術的に示される物件数よりも少ないことを指摘している。これらは不動産に対する期待パフォーマンスからの乖離を引き起こす要因となりうる。取引に関わるリスク・リターンは，投資家の経済的困窮状況と保有期間そして保有費用により異なることも報告されており，投資家固有の状況に応じた理解も必要となってくる(Lin & Liu, 2008[31]; Cheng *et al.*, 2008[32])。

1.3　ポートフォリオ分析における不動産の非流動性の取り扱い

さて本節からは実際に非流動性がポートフォリオ選択に与える影響について議論していきたい。流動性の低い資産では，ポートフォリオ内資産の再配分を行う際に，安易に組み替えをすることが難しい。さらに売却購入を行う際に発生するコスト（不動産仲介手数料，収入印紙税，登記簿手数料など）は，伝統的資産（株や債券など）と比較しても高いことが指摘されており，再配分時の負荷となりうる。

ポートフォリオでの不動産の非流動性の理論的考察は Cheng *et al.* (2013)[33]が優れている。以下 Cheng *et al.*に従って彼らの分析を見ていきたい。まず非流動的な不動産，流動的金融資産，無リスク資産の 3 つの異なる資産を仮定し，現代ポートフォリオ理論の枠組みで最適化を図る。

$$\max_{w_{RE},w_L} \{w_{RE}u_{RE} + w_L u_L + (1 - w_{RE} - w_L)r_f - \lambda[w_{RE}^2\sigma_{RE}^2 + 2w_{RE}w_L\sigma_{RE}\sigma_L\rho + w_L^2\sigma_L^2]\}$$

w_{RE}: 不動産への資産配分，w_L: 金融資産への資産配分
u_{RE}: 不動産の期間リターン，u_L: 金融資産の期間リターン
r_f: 無リスク資産の期間リターン
σ_{RE}: 不動産の標準偏差，σ_L: 金融資産の標準偏差
ρ: 不動産と金融資産の相関，λ: リスク回避度
C: 取引コスト　　(1.3.1)

[30] Lee, S. (2005b). The marginal benefit of diversification in commercial real estate portfolios. Working Papers in Real Estate & Planning. 04/05. Working Paper. University of Reading, Reading, pp.11.
[31] Lin, Z., & Y. Liu (2008), Real Estate Returns and Risk with Heterogeneous Investors, Real Estate Economics, 36, pp.753-776.
[32] Cheng, P., Lin, Z. & Liu, Y (2008), A Model of Time-on-Market and Real Estate Price Under Sequential Search with Recall, Journal of Real Estate Economics, v36 4, pp.813-843
[33] Cheng, P., Lin, Z. & Liu, Y (2013), Is There a Real Estate Allocation Puzzle?. The Journal of Portfolio Management. Vol. 39, No. 5, pp.61-74
Cheng *et al.* (2013)の研究は US での不動産への最適資産配分を分析したものである。当時，学術的に提案される不動産への最適資産配分と，実際の投資家が持つ資産配分が大きく異なることが「パズル（難問）」として指摘されてきた。そこで過去の研究において見逃されてきた同不動産特性を考慮して，研究を行って同難問に挑んだものである。結果，実際の投資家の不動産資産配分比に近しい比率を見つけ出すことができ，これにより不動産への最適資産配分を理論的アプローチから導くことができたことになる。

同式から不動産への資産配分の最適解を得ようとすると以下の通りとなる。しかし，同式には非流動性が考慮されていない。

$$w_{RE}^{*}=\frac{\frac{u_{RE}-r_f}{\sigma_{RE}}-\rho\left(\frac{u_L-r_f}{\sigma_L}\right)}{2\lambda(1-\rho^2)\sigma_{RE}} \tag{1.3.2}$$

まずは，金融資産のリスク調整後リターンについて検討する。ある期間の調整後リターンは，資産配分比におうじたリターン，リスク，そしてリスク許容度によって決定される。

$$r_L^{Adj}(w_L)=(w_L u_L-\lambda w_L^2\sigma_L^2) \tag{1.3.3}$$

r_L^{Adj}: 金融資産のリスク調整後リターン

しかし，不動産特有の性質があるため同式を直接適用することは難しい。そこで次式のようにこれら特性を考慮していく。「期間依存性」と呼ぶ「Non-i.i.d 特性」を適用し，「流動リスク」と「高い取引コスト」を考慮して，平均分散分析を行うものである。ここで留意したいのは，期間依存性である。Cheng *et al.*は長期ポートフォリオを動学的最適化で解くことを考えていない。それよりも，不動産での平均分散分析の理論的欠点を補正して分析を試みる。複数期間にわたる投資家効用の最大化は，i.i.d 過程を仮定する場合，一期間のものと比較しても差がないということがわかっているが(Merton, 1969[34], Samuelson, 1969[35], Fama, 1970[36])，不動産リターンにおいて i.i.d 過程が満たされないことが指摘されている（期間依存性）。そこで i.i.d 過程にかわる新たな仮定をおき平均分散分析をおこなったのが Cheng *et al.*の手法である。この期間依存性については日本の不動産市場においても存在が認識できる結果が得られている(鈴木・高辻, 2013b)[37]。

次式は不動産資産配分のリスク調整後リターンを示すものであるが，これら不動産の特性を考慮している。不動産は投資期間に依存されることがわかっており，つまり最適な保持期間が存在することになる。また，不動産は売却を決意しても，金融資産のように即座に売却できるわけではなく，一定の市場滞留期間がランダムに与えられる。つまり不動産の保持期間Tは，不確実な市場滞留期間$\tilde{t}$の影響を受けることになる。

[34] Merton, R. (1969). Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous Time Case, Review of Economics and Statistics 51, pp.247-57

[35] Samuelson (1969). Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming, Review of Economics and Statistics 51, pp.239-246

[36] Fama, E.(1970), Multi-period Consumption–Investment Decisions., American Economic Review, pp. 163-74.

[37]鈴木英晃・高辻秀興(2013b)，不動産投資指数の時系列的変動における特徴，不動産学会学術講演会論文集: 第 29: pp.151-153

$$r_{RE}^{Adj}(w_{RE}) = E^{ex\ ante}(w_{RE}\tilde{R}_{T+\tilde{t},RE}) - \lambda \times Var^{ex\ ante}(w_{RE}\tilde{R}_{T+\tilde{t},RE}) - w_{RE}C$$

r_{RE}^{Adj}: 不動産のリスク調整後リターン
$E^{ex\ ante}$: 将来にわたって不確実な期待リターン
T: 売却時点までの保持期間 (1.3.4)
$\tilde{t}$: 不確実な市場滞留時間
$\tilde{R}_{T+\tilde{t},RE}$: 不確実な不動産売却時点までの不動産リターン
$Var^{ex\ ante}$: 将来にわたって不確実な分散
C: 高い取引コスト

不確実な市場滞留時間$\tilde{t}$と同時間を考慮した不動産リターン$\tilde{R}_{T+\tilde{t},RE}|\tilde{t}$がもつ，不確実性をさらに二つの確率変数に分解して考える : 価格変動リスクと流動性リスクである。前者は不確実な市場滞留時間により価格が変動するリスクと, 後者はさらに市場の流動性環境により決定されるリスクである。これにより将来にわたって不確実な分散$Var^{ex\ ante}$は次のように表現することができる。分散自体に，平均と分散が存在することになる。

$$Var^{ex\ ante}(\tilde{R}_{T+\tilde{t},RE}) = \mathrm{Var}(E[w_{RE}\tilde{R}_{T+\tilde{t},RE}|\tilde{t}]) + E[Var(w_{RE}\tilde{R}_{T+\tilde{t},RE}|\tilde{t})] \quad (1.3.5)$$

この分散と平均をそれぞれt_{TOM}とσ_{TOM}^2する。そして不動産リターンの不確実性$((T+\tilde{t})u_{RE}$, $(T+\tilde{t})\sigma_{RE})$も考慮し，これを解くと次のように簡潔に表現できる。

$$Var^{ex\ ante}(\tilde{R}_{T+\tilde{t},RE}) = w_{RE}^2\{(T+\tilde{t})^2\sigma_{RE}^2 + (\sigma_{RE}^2 + u_{RE}^2)\sigma_{TOM}^2\} \quad (1.3.6)$$

不確実な不動産売却時点までの不動産リターンについても同様に表現する。

$$\begin{aligned} E^{ex\ ante}[w_{RE}\tilde{R}_{T+\tilde{t},RE}] &= E[E[w_{RE}\tilde{R}_{T+\tilde{t},RE}|]\tilde{t},] \\ &= E[w_{RE}(T+\tilde{t})u_{RE}] \\ &= w_{RE}(T+\tilde{t})u_{RE} \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

これらを不動産のリスク調整後リターン式に代入すると次のように表現できる。

$$\begin{aligned} r_{RE}^{Adj}(w_{RE}) &= w_{RE}(T+t_{TOM})u_{RE} - \lambda w_{RE}^2[(T+t_{TOM})^2\sigma_{RE}^2 + \sigma_{TOM}^2(u_{RE}^2+\sigma_{RE}^2)] \\ &\quad - w_{RE}C \\ &= w_{RE}u_{RE} - \lambda w_{RE}^2 \times \left[(T+t_{TOM})\sigma_{RE}^2 + \frac{\sigma_{TOM}^2(u_{RE}^2+\sigma_{RE}^2)}{T+t_{TOM}}\right] - w_{RE}\frac{C}{T+t_{TOM}} \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

最後にポートフォリオのリスク調整後リターンを示す。数式を簡潔にするためここでは各資産間には相関がないと仮定する。すると，以下のように表現することができる。

$$r_{Port}^{Adj} = r_L^{Adj}(w_L) + r_{RE}^{Adj}(w_{RE}) + (1 - w_L - w_{RE})r_f \quad (1.3.9)$$

r_{Port}^{Adj}: ポートフォリオのリスク調整後リターン

同式に前述の不動産と金融資産のリスク調整後リターンで表現すると次の通りとなる。これにより一般的な平均分散分析に次の不動産特性 3 つのことを考慮するようことができた：保持期間，流動性リスク，そして取引コストである。この式は，通常の平均分散モデルよりも複雑であることがわかる。

$$\max_{w_{RE},w_L}\left\{(w_L u_L-\lambda w_L^2\sigma_L^2)+(1-w_L-w_{RE})r_f+w_{RE}\left[u_{RE}-\frac{C}{T+t_{TOM}}\right]-\lambda w_{RE}^2\left[(T+t_{TOM})\sigma_{RE}^2+\frac{\sigma_{TOM}^2(u_{RE}^2+\sigma_{RE}^2)}{T+t_{TOM}}\right]\right\} \tag{1.3.10}$$

同式からもわかるとおり，不動産の保持期間は大きな影響を及ぼす。つまり，最適保持期間T^*が存在することになる。以下，この最適保持期間を探す。

まず，保持期間Tと資産配分比（ウェイト）w_{RE}に関わる派生部分を抜き出す。これらからそれぞれの特徴を捉えることができる。

$$-\lambda w_{RE}^2\left[\sigma_{RE}^2-\frac{\sigma_{TOM}^2(u_{RE}^2+\sigma_{RE}^2)}{(T+t_{TOM})^2}\right]+\frac{w_{RE}C}{(T+t_{TOM})^2}=0$$

$$\frac{\lambda w_{RE}^2\sigma_{TOM}^2(u_{RE}^2+\sigma_{RE}^2)+w_{RE}C}{(T+t_{TOM})^2}=\lambda w_{RE}^2\sigma_{RE}^2 \tag{1.3.11}$$

$$u_{RE}-r_f-\frac{C}{T+t_{TOM}}-2\lambda w_{RE}\times\left[(T+t_{TOM})\sigma_{RE}^2+\frac{\sigma_{TOM}^2(u_{RE}^2+\sigma_{RE}^2)}{T+t_{TOM}}\right]=0 \tag{1.3.12}$$

まずは保持期間に関わる派生式を以下のように書き直す。

$$\frac{\lambda w_{RE}^2\sigma_{TOM}^2(u_{RE}^2+\sigma_{RE}^2)+w_{RE}C}{(T+t_{TOM})^2}=\lambda w_{RE}^2\sigma_{RE}^2 \tag{1.3.13}$$

つまり，最適保持期間は以下のように考えられる。

$$T^*+t_{TOM}=\sqrt{\frac{\lambda w_{RE}\sigma_{TOM}^2(u_{RE}^2+\sigma_{RE}^2)+C}{\lambda w_{RE}\sigma_{RE}^2}} \tag{1.3.14}$$

ここから知見を得るために次のように変換することができる。

$$\frac{\partial T^*}{\partial C}=\frac{1}{2\lambda w_{RE}\sigma_{RE}^2\sqrt{\frac{\lambda w_{RE}\sigma_{TOM}^2(u_{RE}^2+\sigma_{RE}^2)+C}{\lambda w_{RE}\sigma_{RE}^2}}}>0 \tag{1.3.15}$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial \sigma_{TOM}^2} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\lambda w_{RE}\sigma_{TOM}^2(u_{RE}^2+\sigma_{RE}^2)+C}{\lambda w_{RE}\sigma_{RE}^2}}}\left[\frac{(u_{RE}^2+\sigma_{RE}^2)}{\sigma_{RE}^2}\right] > 0 \tag{1.3.16}$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial \sigma_{RE}^2} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\lambda w_{RE}\sigma_{TOM}^2(u_{RE}^2+\sigma_{RE}^2)+C}{\lambda w_{RE}\sigma_{RE}^2}}} \times \left(-\frac{\sigma_{TOM}^2+u_{RE}^2}{\sigma_{RE}^4} - \frac{C}{\lambda w_{RE}\sigma_{RE}^4}\right) < 0 \tag{1.3.17}$$

これにより Cheng *et al*. (2013)は保持期間と資産構成比における次らの定理を導き出した。

最適保持期間

*“不動産の取引コスト，流動性リスクそして価格リスクは最適保持期間を決定する際に重要な役割を担っている。他の条件が等しければ，流動性がより低い市場（より大きなσ_{TOM}^2）とより高い取引コスト（より大きなC）は，最適保持期間がより長くなることを意味する。しかし大きな価格変動（σ_{RE}^2）は，最適保持期間がより短くなることを意味する。*Cheng *et al.* (2013: p69) 筆者妙訳”

$$\frac{\partial T^*}{\partial C} > 0;\ \frac{\partial T^*}{\partial \sigma_{TOM}^2} > 0;\ \frac{\partial T^*}{\partial \sigma_{RE}^2} < 0 \tag{1.3.18}$$

資産構成比

“不動産の最適な資産配分比w_{RE}^*は，以下の式により与えられる。さらにw_{RE}^*は不動産流動リスクと取引コストに対して負の関連をしている。つまり， *a)* $\frac{\partial w_{RE}^*}{\partial C} < 0$*; b)* $\frac{\partial w_{RE}^*}{\partial \sigma_{TOM}} < 0$*。Cheng et al. (2013: p69)筆者妙訳”*

$$w_{RE}^* = \frac{u_{RE} - r_f - \frac{C}{T^*+t_{TOM}}}{2\lambda\left[(T^*+t_{TOM})\sigma_{RE}^2 + \frac{\sigma_{TOM}^2(u_{RE}^2+\sigma_{RE}^2)}{T^*+t_{TOM}}\right]} \tag{1.3.19}$$

Cheng *et al.*のモデルは，不動産特性である非流動性を考慮することの重要性とその手法を示した点に，大きな功績がある。また彼らは，実際に同手法を用いた実証分析も行っており次のような結果がわかっている：非流動性等の不動産の特性を考慮した彼らの手法のほうが，それ以外の特性を考慮していない（高い資産配分比率を示す）先行研究よりも，実際の投資家の資産配分に近い結果を示す。つまり，不動産特性を考慮しなければ資産配分比率は誇張されてしまう可能性があり，ポートフォリオ分析においては欠くことのできない要素であるとの示唆である。この新たに考慮された非流動性リスクによって，ポートフォリオの不動産比率をより正確に反映させることができると期待される。

1.4　ポートフォリオ分析モデル

前節において，不動産の非流動性とは何かを論考してきた。次に論点となってくるのがポートフォリオ分析における想定する運用期間（投資ホライズン）である。不動産はその非流動性と高い取引コストにより運用が長期化する傾向にある。つまり，非流動性のため従来の一期間平均･分散モデルの結果を単純に長期の将来に敷衍して解釈することができない。そこで自ずと長期保有を前提としたポートフォリオ構築方法を採用する必要性が見えてくる。

1.4.1　先行研究と一期間モデル

ポートフォリオでの不動産の役割は数多くなされている。その分散投資効果は，早くは Ibbotson & Siegel(1984)によって示された。Lee (2003)は不動産の分散効果がダウンサイドによって発揮されることを報告し，Lee & Stevenson (2006)は，不動産が長期間にわたり最適ポートフォリオに組み込まれること,そして運用期間が長期化するほど不動産がポートフォリオに良い影響を与えることも報告した。その他，日本市場を対象としたものを含め様々な研究がある(例えば Lee, 2005b; Moroney & Naka,2006; 鈴木・高辻, 2013a など) 。

これら研究の共通点は，一期間モデルを採用していることであるが，前述のとおり，不動産の非流動性を鑑みると，一期間平均･分散モデルの結果を単純に長期の将来に敷衍して解釈することには限界がある。

マーコビッツの平均分散モデル

$$\sigma_{Port}^2 = \min_{w}\left[\sum_{i=1}^{N} w_i^2\sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} w_i w_j \sigma_{ij}\right]$$
$$s.t.\ E(R_{Port}) = \sum_{i=1}^{N} w_i E(R_i)\,,\ \sum_{i=1}^{N} w_i = 1 \qquad (1.4.1.1)$$

w_i：i資産のウェイト，　σ_i^2：i資産の分散，　σ_{ij}：i資産とj資産との共分散，
N：資産の数，　$E(R_i)$：i資産の期待収益率，$E(R_{Port})$：ポートフォリオの期待収益率　ポートフォリオの分散のnotation

ポートフォリオ研究の一般的な採用手法はマーコビッツモデル(Markowitz, 1952)[38]である。現代ポートフォリオ理論の基礎モデルでもあり,一般化された投資家の取るべき行動を示唆している。同モデルは,多数のリスク資産を組み合わせた加重平均リターンの最小分散点をプロットし,最小分散集合を描く。同集合上のなかでも分散が最小となる点を最小分散点と呼ぶ。合理的な投資家は，平均と分散のトレードオフにより最善のポートフォリオを選択するため，同分散点から上方の集合プロットが，効率的フロンティアとなる。リスクを最も敬遠する投資家は，最小分散点でのポートフォリオを選択し，リスクを選好する投資家は，最小分散点の上方に位置するポートフォリオを選択する。

[38] Markowitz, H.M. (1952), Portfolio Selection, The Journal of Finance, 7 (1): pp.77–91

その後，無リスク資産をポートフォリオへ導入することにより，ただ一つの最適ポートフォリオ構成を探し出すことが可能であると提案された（Sharpe, 1964）[39]。これは，無リスク資産地点と効率的フロンティアとの「接点」が最適ポートフォリオを示すことから接点ポートフォリオとも呼ばれている。リスクを選好しない投資家は，同接線上での，無リスク資産の比率を増やすこととなる。よりリスクを選好する投資家は，同接線上の最適ポートフォリオ地点より上方を選択する（借入金を増やしていく）。

これらモデルは，ポートフォリオ選択と投資家のリスク選好について有益な理解をもたらすが，一期間での運用のみを仮定しており，「近視眼的」であることが指摘されている。投資家が一定期間の投資ホライズンしか持たず，同期間外で発生する事象に対し無関心であると仮定としている。つまり，同期間前の既存ポートフォリオ構成を無視し，さらに同期間後の運用についても無関心である。しかし，投資家は複数期間にわたる投資行動を繰り返しており，実際の意思決定を適切に表していない。そこで複数期間モデルに拡張する必要がでてくる。

1.4.2　投資家効用とその理論的整合性

長期ポートフォリオ分析への拡張にあたり，投資家効用と平均分散分析の理論的整合性は重要である。投資家の持つリスク許容度（またはリスク回避度）と，平均分散分析との関係性は，ポートフォリオ理論の基礎となっている。同関係性はあたかも同じ理論であるかのように議論されることが多いが，これら二つの概念は，異なる背景を持つ。これら概念の整合性が確認されて，ようやく投資家の効用とポートフォリオ選択は理論的にも有効なものとなる。

投資家の期待効用理論と平均分散モデルが整合するための条件は，期待効用が平均と分散で表現される効用関数が 2 次関数であり，そしてリターンの確率分布が正規分布で表される場合である。確率分布については，正規分布または類似の楕円分布に従う場合において有効であることがわかっている（池田, 2000）[40]。

$$E\,u(W_t) = u(m) + \frac{u''(m)}{2!}\sigma^2 \qquad (1.4.2.1)$$

m: 期待平均リターン

一期間を仮定するポートフォリオ問題においては，正規分布をもちいて問題とはならない。しかし，長期分析になると，正規分布を仮定することが難しくなる。これは，長期のベキ効用関数がポートフォリオの収益率 1+R の「積」となるためである。そこで，対数分布を仮定して長期ポートフォリオのモデル構築を狙ったのが Cambell & Viceira (2002)[41]である。対数リターンを使うと「和」にできるため扱いやすい。ここではひとまず一期間のモデル化から紐解いていく。まず，投資家のリスク回避度はベキ効用関数で表されることが多いが，対数正規を仮定すると，次のようにテイラー展開により近似して表すことができる。

[39] Sharpe, W. (1964), Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium, Journal of Finance, XIX, pp.425-442

[40] 池田昌幸(2010). 金融経済学の基礎. 朝倉書店, p.86

[41] Campbell, J. Y. & Viceira, L.M. (2002), 戦略的アセットアロケーション―長期投資のための資産配分の考え方. 邦訳 木島正明・野村證券金融経済研究所（2005），東洋経済新報社

$$\max \log E_t\left(\frac{W_{t+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right) = \frac{(1-\gamma)E_t w_{t+1}}{1-\gamma} + \frac{\frac{1}{2}(1-\gamma)^2\sigma_{wt}^2}{1-\gamma} \qquad (1.4.2.2)^{42}$$

整理すると以下のような平均と分散の線形関係の成立がわかる。

$$\max \log E_t(1-R_{p,t+1})_t - \frac{\gamma}{2}\sigma_{pt}^2 \qquad (1.4.2.3)^{43}$$

投資家は一般的に，高い収益性を好むが，リスクに対しては回避的である。また投資は，高い収益性を持つものはリスクも高く，低収益性には低リスクを伴う，というのが通念でもある。そこで，投資家は許容できるリスクの範囲内において投資を行うことが合理的な行動といえる。投資家のリスク回避係数をγで表す。$\gamma = 1$の場合，投資家はリスクに対して中立的である。$\gamma > 1$の場合，分散（リスク）を低くとろうとし，リターンは低くなる，つまりリスク回避型である。$\gamma < 1$はよりリスクの高い，しかしリターンも高いポートフォリオを選択するので，リスク選好型である。

期待効用関数と同じように，分布の条件については長期のベキ効用はポートフォリオの収益率1+R の「積」であるため扱いづらいが，対数リターンを用いることにより「和」の表現となり扱いやすくなる。これは，対数正規分布する収益率の対数リターンは正規分布するため対数リターンを「和」で表現できるためである。また対数正規分布が持つ非負性は実際の金融投資商品ともなじみやすいことも便利である。

しかし，そうなると次にポートフォリオの対数リターンと原資産の対数リターンをいかに整合させるのかが課題となる。ここからは Cambell & Viceira(2002)に従い，この接続を行う。
まずリスク資産と無リスク資産の二つのみでポートフォリオ構築を考える。

$$\frac{1+R_{p,t+1}}{1+R_{f,t+1}} = 1 + \alpha_t\left(\frac{1+R_{t+1}}{1+R_{f,t+1}} - 1\right) \qquad (1.4.2.4)^{44}$$

$R_{p,t+1}$: ポートフォリオのリターン（時点 t）
R_{t+1}: リスク資産のリターン（時点 t）
α_t: リスク資産のポートフォリオウェイト（時点 t）

対数リターンをとると次の通りとなる。

$$r_{p,t+1} - r_{f,t+1} = \log\left[1 + \alpha_t\left(exp\left(r_{t+1} - r_{f,t+1}\right) - 1\right)\right] \qquad (1.4.2.5)^{45}$$

ここまでは，ポートフォリオのリターンと原資産のリターンが非線形な関係となっていることがわかる。そこで，関数$f_t(r_{t+1} - r_{f,t+1}) = \log\left[1 + \alpha_t\left(exp\left(r_{t+1} - r_{f,t+1}\right) - 1\right)\right]$をテイラー展開により 2 次項まで近似を行う。

---

[42] ibid., pp.28-29 (2.15)式と(2.16)式の組み合わせ
[43] ibid., p.29 (2.20)式
[44] ibid., p.223, 4 行目
[45] ibid., p.223, 6 行目

$$f_t\left(r_{t+1}-r_{f,t+1}\right)\approx f_t(0)+f_t'(0)\left(r_{t+1}-r_{f,t+1}\right)+\frac{1}{2}f_t''(0)\left(r_{t+1}-r_{f,t+1}\right)^2 \quad (1.4.2.6)^{46}$$

$f_t(0)$をα_t，$f_t''(0)$を$\alpha_t(1-\alpha_t)$，$\left(r_{t+1}-r_{f,t+1}\right)^2$を条件付期待値$\sigma_t^2$へとそれぞれ置き換える。

$$r_{p,t+1}-r_{f,t+1}=\alpha_t\left(r_{t+1}-r_{f,t+1}\right)+\frac{1}{2}\alpha_t(1-\alpha_t)\sigma_t^2 \quad (1.4.2.7)^{47}$$

これによりポートフォリオと原資産のリターンは，リスク資産の分散による修正ファクターをもって横並びに表すことができる。テイラー展開により 2 次項までを考慮しているが，同ポートフォリオ構築期間の間隔が短くなればなるほど高次項の影響が無視できる水準となる。
これを複数資産へ拡張すると次の通りとなる。この場合，個別資産の対数リターンの同時対数分布が条件付き分散共分散行列$\boldsymbol{\Sigma_t}$*を持つと仮定する。*

$$r_{p,t+1}-r_{f,t+1}=\boldsymbol{\alpha_t'}\left(\boldsymbol{r}_{t+1}-r_{f,t+1}\boldsymbol{\tau}\right)+\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha_t'}\boldsymbol{\sigma_t^2}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha_t'}\boldsymbol{\Sigma_t}\boldsymbol{\alpha_t} \quad (1.4.2.8)^{48}$$

$\boldsymbol{\tau}$:$n\times 1$ ベクトル

同複数資産モデルの最適ポートフォリオのウェイト解を求めると以下の通りとなる。

$$\boldsymbol{\alpha_t}=\frac{1}{\lambda}E_t^{-1}\left(E_t\boldsymbol{r}_{t+1}-r_{f,t+1}\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{\sigma_t^2}/2\right) \quad (1.4.2.9)^{49}$$

無リスク資産が存在しないと仮定した場合は以下のように書き換えることもできる。

$$\boldsymbol{\alpha_t}=\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{\Sigma_t^{-1}}\left(E_t\boldsymbol{r}_{t+1}-r_{0,t+1}\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{\sigma_t^2}/2\right)+\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\left(-\boldsymbol{\Sigma_t^{-1}}\boldsymbol{\sigma}_{0t}\right) \quad (1.4.2.10)^{50}$$

このように投資家の期待効用理論と平均分散モデルの整合性を，扱いやすい対数リターンをもって確認することができた。この整理をもって，複数期間への拡張が可能であるといえる。

1.4.3　これまでの不動産を含む長期ポートフォリオ研究

先行研究において長期ポートフォリオを意識したものも近年になり見受けられるが，そのすべてが一期間モデルの拡張型である。鈴木&高辻(2013a)は，最小分散ポートフォリオでの不動産の役割を分析した。彼らの手法は，一期間平均分散モデルに一定のウィンドウ（短期 3 年間と中期 7 年間）を設定し，同ウィンドウを月次単位で移動させることにより，異なる観測期間での不動産資産配分の変動を調べた。不動産のリスク分散での役割における知見が得られたが，同手法は拡張型一期間モデルであった。Merton(1969, 1971)[51]と Samuelson(1969)[52]は，長期投資家が近視眼

[46] ibid., p.223, 11 行目
[47] ibid., p.223, 15 行目
[48] ibid., p.226, 2 行目
[49] ibid., p.33, (2.26)式
[50] ibid., p.33, (2.27)式
[51] Merton, R. (1969). Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous Time Case, Review of Economics and Statistics 51, 247-57

的ポートフォリオを選択する場合があることを指摘している。投資家効用をベキ効用関数で表現でき，かつリターンが i.i.d 過程に従うときである。しかし，不動産リターンは i.i.d 過程に従わないことが指摘されており（Lin & Liu, 2008）[53]，やはり簡単には，一期間モデルとの整合性が上手くとれない。Cheng *et al.* (2013)の採用手法も拡張型の一期間モデルであるが，Cheng *et al.*は i.i.d 過程に代わる仮定を適用し分析した。これは，「保持期間の二乗とともに不動産リターンの分散が増加する」という Lin & Liu (2008)が提案した仮定である。これの仮定採用によって Cheng *et al.* は長期投資家の効用を考慮した上での一期間分析モデルの適用を前進させた。しかし，適用しているものはあくまでも一期間モデルの拡張であり，投資家の意思決定を動的に把握するものではない。また，動学的最適化を行った場合にも同様の結果が得られるのかの検証が行われていない。長期ポートフォリオの分析を行う場合には，単純な平均分散分析では対応できない場合が多く，複数期間モデルへの拡張が必要になる。

1.4.4　投資家の多段階意思決定

それでは長期投資家にとって適切な分析モデルとは何になるのか？本節では，あるべき複数期間モデルを考える。

まずは長期投資家のもつポートフォリオを理解する上で，重要となる要素は，投資家の意思決定プロセスである。ここで，とある２つの異なるリスク資産（資産 A と資産 B）のみが存在すると仮定する。0 期においては，ポートフォリオは資産 A のみで構成をされている。１期目より，ポートフォリオ内の資産の再配分を開始する。この再配分はＴ期まで繰り返して行われる。例証のため，ここでは取引に関わる費用，借入金調達，空売り，物価変動等は考慮しない。

$$\begin{aligned} W_1 &= W_0(1+\boldsymbol{r_0}'\boldsymbol{w_0}) \\ W_2 &= W_1(1+\boldsymbol{r_1}'\boldsymbol{w_1}) \\ &\vdots \\ W_{t+1} &= W_t(1+\boldsymbol{r_t}'w_t) \end{aligned} \qquad (1.4.4.1)$$

where

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_p \end{pmatrix},\ \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_p \end{pmatrix}$$

Ｔ期でのポートフォリオ総額は，次のように表せる。

$$W_T = W_0(1+\boldsymbol{r_0}'\boldsymbol{w}_0)(1+\boldsymbol{r_1}'\boldsymbol{w_1})\cdots(1+\boldsymbol{r}_{T-1}'\boldsymbol{w}_{T-1}) \qquad (1.4.4..2)$$

各期での成長率$(1+\boldsymbol{r}_{T-1}'\boldsymbol{w}_{T-1})$を，対数正規分布を仮定すると，このように書き換えることができる。

Merton, R. (1971). Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous Time Model, Journal of Economic Theory 3, 373-413

[52] Samuelson (1969). Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming, Review of Economics and Statistics 51, 239-246

[53] Lin, Z., & Y. Liu (2008), Real Estate Returns and Risk with Heterogeneous Investors, Real Estate Economics, 36, 753-776.

$$\log W_T = \log W_0 + \log(1 + r_0{}' w_0) + \log(1 + r_1{}' w_1) \cdots \log(1 + r_{T-1}{}' w_{T-1}) \quad (1.4.4..3)$$

同再配分は，投資家に対し，ある「方針（到達目標)」を導入することによって，毎期ごとに決定される。つまり，ある目的（効用）を最大化するために合理的に実行され，T期まで繰り返される。

$$E\left[\sum_{t=1}^{T} U(W_t)\right] \rightarrow \max_{w_0, w_1, \cdots, W_{T-1}} \quad (1.4.4.4)$$

投資家の意思決定は,初期からT期までを通じた総合的な効用を最大化するために多段階に渡り行っており，過去と現在のパフォーマンスのみならず，将来のパフォーマンスも勘案しながら進めていくこととなる。これは「現在の状態 status」と「最終到達目的」を鑑みての資産組み替えを行っていくことを意味する。複数期間モデルでは，これら要件を勘案しながら，分析モデルを構築することが必要となる。具体的には，動的最適化のように意思決定機会の都度に状態と到達目的を考えて行動するモデルが必要となってくる。しかし，現状において，複数期間モデルを用いて不動産を含むポートフォリオの動的最適化を試みた例は，筆者の知る限り見当たらない。

1.5　投資家のリスク回避度

さて，これまでポートフォリオ選択における不動産の取り扱いについて議論してきた。しかしここで，投資家のリスク回避度がポートフォリオ選択に与える影響についても焦点をあてたい。投資家のリスク回避度はポートフォリオ選択における重要な要素となっているにも関わらず,これら先行研究は異なるリスク回避度をもつ投資家を想定したものはなく,軽視されているとも言ってよいだろう。

この重要性については以下に見ていきたい。まずは投資家のリスク回避度とポートフォリオ選択の関係について整理する。以下の式は Campbell and Viceira（2002，邦訳木島正明・野村證券金融経済研究所（2005））をもとに引用した。なお誤解の恐れがない限り時間の添え字を省略するなど，若干表現を簡略化した。

(1)　古典的な平均分散モデルによる場合

投資家は大きな平均と小さな分散を持つポートフォリオリターンを選好し,両者は線形のトレードオフ関係にあると仮定する。

(1-1)　N種類のリスク資産と1種類の無リスク資産によるポートフォリオ選択問題は次のように定式化できる。

$$\boldsymbol{\alpha}'\left(\mathrm{E}\boldsymbol{R} - R_f \boldsymbol{\iota}\right) - \frac{k}{2}\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\alpha} \rightarrow \max_{\boldsymbol{\alpha}} \quad (1.5.1)^{54}$$

$\boldsymbol{\alpha}$: N種類のリスク資産への投資ウェイトベクトル

$\boldsymbol{R}$: N種類のリスク資産のリターンベクトル

E$\boldsymbol{R}$: $\boldsymbol{R}$の期待値

R_f: 無リスク資産のリターン（スカラー）

[54] Campbell et al.（2002）邦訳，p.22，(2.7)式

$\boldsymbol{\iota}$: 成分が 1 のベクトル
$\boldsymbol{\Sigma}$: N種類のリスク資産の間の分散共分散行列
k: リスク回避度（$k > 0$）

この解は次のようになる。

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{k}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\left(\mathrm{E}\boldsymbol{R} - R_f\boldsymbol{\iota}\right) \tag{1.5.2}$$[55]

リスク回避度kが大きくなるにつれてリスク資産への投資ウェイトは小さくなる。つまりリスク回避度（k 又はγ）が無限大になるとき（$k = \infty$），無リスク資産へ 100%投資しようとすることが読み取れる

(1-2)　N種類のリスク資産と 1 種類のリスク資産（ベンチマーク）によるポートフォリオ選択問題は次のように定式化できる。断りのない記号は上と同じ意味である。

$$\boldsymbol{\alpha}'(\mathrm{E}\boldsymbol{R} - R_0\boldsymbol{\iota}) - \frac{k}{2}(\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\alpha} + 2\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\sigma_0} + \sigma_0^2) \rightarrow \max_{\boldsymbol{\alpha}} \tag{1.5.3}$$[56]

$\boldsymbol{\alpha}$: N種類のリスク資産への投資ウェイトベクトル
$\boldsymbol{R}$: N種類のリスク資産のリターンベクトル
R_0: ベンチマークのリスク資産のリターン（スカラー）
$\boldsymbol{\Sigma}$: N種類のリスク資産の対ベンチマーク超過リターンの間の分散共分散行列
$\boldsymbol{\sigma_0}$: N種類のリスク資産の対ベンチマーク超過リターンとベンチマークリターンとの共分散ベクトル
σ_0^2: ベンチマーク資産のリターンの分散

この解は次のようになる。

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{k}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathrm{E}\boldsymbol{R} - R_0\boldsymbol{\iota}) + (-\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\sigma_0}) \tag{1.5.4}$$[57]

リスク回避度（k）が大きくなるにつれてリスク資産の対ベンチマーク超過リターンにより説明するリスク資産の投資ウェイト部分は小さくなる（第 1 項）。しかしこの場合，それにつれてベンチマーク資産への投資ウェイトが大きくなるのではなく，第 2 項が表す投資ウェイトに近づくことを意味する。第 2 項の$(-\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\sigma_0})$は，最小分散ポートフォリオを組んだときの投資ウェイトを表している。つまり，

$$\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\alpha} + 2\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\sigma_0} + \sigma_0^2 \rightarrow \min_{\boldsymbol{\alpha}} \tag{1.5.5}$$

の解である。したがってリスク回避度kが大きくなるにつれて最小分散ポートフォリオの投資ウェイトに近づくことがいえる。

(2)　期待効用理論にもとづく平均分散モデルによる場合

Campbell *et al*.（2002）が長期ポートフォリオの分析のために展開したモデルである。投資家は資産についてのべき効用関数を持ち，期末における期待効用を最大化すると仮定する。ここでは一期間だけを考えて問題を次のように定式化する。断りのない記号は上に同じ意味である。

---

[55] ibid.，p.23，(2.8)式
[56] ibid.，p.23，15～22 行
[57] ibid.，p.23，(2.9)式

$$\mathrm{E}\left(\frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right) \rightarrow \max_{\boldsymbol{\alpha}} \quad (1.5.6)^{58}$$

W: 総資産（ポートフォリオ）

γ: リスク回避度（$\gamma > 1$）

ポートフォリオのリターンが対数正規分布にしたがうと仮定するとこの問題は次の問題と等価になる。

$$\mathrm{E}r_p - \frac{\gamma-1}{2}\sigma_p^2 \rightarrow \max_{\alpha} \quad (1.5.7)^{59}$$

r_p: ポートフォリオの対数リターン

σ_p^2: ポートフォリオの対数リターンの分散

ここでポートフォリオの対数リターンr_pを個別資産の対数リターンで表現したいが，個別資産のリターンもまた対数正規分布にしたがうとした場合，単純な線形和で表現することはできない。そこで Campbell *et al*.（2002）は次の近似式を導き出している。これが彼らが長期ポートフォリオの分析のために工夫した点の 1 つである。

(2-1)　N種類のリスク資産と無リスク資産（ベンチマーク）の場合，ポートフォリオの対数リターンは個別資産の対数リターンを用いて次のように表すことができる。

$$r_p = \boldsymbol{\alpha}'(\boldsymbol{r} - r_f\boldsymbol{\iota}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\sigma}^2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\alpha} + r_f \quad (1.5.8)^{60}$$

$\boldsymbol{r}$ ：N種類の個別資産の対数リターンベクトル

r_f: 無リスク資産の対数リターン（スカラー）

$\boldsymbol{\sigma}^2$：N種類の個別資産の対数リターンの分散ベクトル

これを(2.7)式に適用すると問題は次のように改められる。

$$\boldsymbol{\alpha}'\left(\mathrm{E}\boldsymbol{r} - r_f\boldsymbol{\iota} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^2\right) - \frac{\gamma}{2}\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\alpha} \rightarrow \max_{\boldsymbol{\alpha}} \quad (1.5.9)^{61}$$

この解は次のようになる。

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\left(\mathrm{E}\boldsymbol{r} - r_f\boldsymbol{\iota} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^2\right) \quad (1.5.10)^{62}$$

リスク回避度γが大きくなるにつれてリスク資産への投資ウェイトは小さくなる。つまり無リスク資産へ 100%投資しようとする。先の結果と同じである。

(2-2)　N種類のリスク資産と 1 種類のリスク資産（ベンチマーク）の場合，ポートフォリオの対数リターンは個別資産の対数リターンを用いて次のように表すことができる。

$$r_p = \boldsymbol{\alpha}'(\boldsymbol{r} - r_0\boldsymbol{\iota}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\sigma}^2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\alpha} + r_0 \quad (1.5.11)^{63}$$

$\boldsymbol{r}$ ：N種類の個別資産の対数リターンベクトル

r_0: ベンチマークとなるリスク資産の対数リターン（スカラー）

---

58 ibid.，p.28，(2.15)式

59 ibid.，p.29，(2.18)式

60 ibid.，p.31，(2.23)式

61 ibid.，p.32 脚注

62 ibid.，p.33，(2.26)式

63 ibid.，p.32 脚注

$\boldsymbol{\sigma^2}$：N種類の個別資産の対数リターンの分散ベクトル

これを(2.7)式に適用すると問題は次のように改められる。

$$\boldsymbol{\alpha}'\left(\mathrm{E}\boldsymbol{r} - r_0\boldsymbol{\iota} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^2 + \boldsymbol{\sigma_0}\right) - \frac{\gamma}{2}(\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\alpha} + 2\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\sigma_0} + \sigma_0^2) \rightarrow \max_{\boldsymbol{\alpha}} \quad (1.5.12)^{64}$$

$\boldsymbol{\sigma_0}$：N種類のリスク資産の対ベンチマーク超過対数リターンとベンチマーク対数リターンとの共分散ベクトル

σ_0^2：ベンチマーク資産の対数リターンの分散

この解は次のようになる。

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\left(\mathrm{E}\boldsymbol{r} - r_0\boldsymbol{\iota} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^2\right) + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)(-\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\sigma_0}) \quad (1.5.13)^{65}$$

リスク回避度$\boldsymbol{\gamma}$が大きくなるにつれてリスク資産の対ベンチマーク超過対数リターンへの評価は小さくなる（第１項）。またこのとき先と同様に，最小分散ポートフォリオの投資ウェイト$(-\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\sigma_0})$に近づくことがいえる。

ここからわかるように，投資家のリスク選好は，収益とリスクのトレードオフをもって説明することができる。また，リスク資産と無リスク資産の配分比が変わることも見て取れる。つまり，投資家効用（リスク回避度）は，ポートフォリオのリターンやリスクそして構成を決定する重要な要因といえる。

このように重要な要素であるにもかかわらず不動産を含むポートフォリオ研究においては軽視されてきた。先行研究において接点ポートフォリオ（最適ポートフォリオ）を用いた分析が一般化している。これは無リスク資産の存在を前提としているものである。しかし，無リスク資産として広く使われる国債は，その流動性が十分に認められ，実際には市場にて取引が行われおり，その価格は変動するリスクを負っている。つまり，無リスク資産として定義して用いることに限界がある。そこで，本研究は，国債を無リスク資産として扱わず，リスク資産として扱う。異なるリスク回避度を持つ投資家を想定し，それぞれの投資家にとっての不動産投資の在り方をさぐる。

1.6　本研究の位置づけと方法

本章は，不動産のもつ非流動性と長期ポートフォリオ内でのその扱いについて先行研究サーベイを通じて論考を行い，今後の不動産を含むポートフォリオ研究のあり方について整理した。特に不動産の非流動性をいかにポートフォリオ分析に組み込んでいくのかという技術的な視点に立ち，非流動性の理論的背景と分析手法に焦点を当て，本研究を位置づけていった。

ここまでの整理からわかるように，不動産の非流動性は，無視してしまうと資産配分比を誇張させる要因であるため，ポートフォリオ分析に欠くことのできない要素である。非流動性は様々な要因で複合的に形成されている。長い取引プロセスは，売却までの価格変動と機会費用発生などの不確実性を増加させる。高い取引費用は保持期間を長くさせる。鑑定評価の誤差は，ポートフォリオ分析で用いる不動産指数に平滑化を引き起こし，適切な市場変動の捕捉を難しくさせる。このように複数要素で構成される不動産の非流動性を適切に把握することが難しい。しかし，無

[64] ibid.，p.33 脚注

[65] ibid.，p.33，(2.27)式

視して分析を行う場合，誤った資産配分結果を引き起こす可能性が高い。

Cheng *et al*.(2013)の非流動性対応型のポートフォリオ選択モデルの提案により，不動産を含むポートフォリオ研究の新たな方向性が示されたといえる。彼らは優れた理論構築を用いてこの特性をポートフォリオ分析に反映させている。一期間平均分散モデルの拡張型ではあるが，本研究の主要な先行研究として位置づけることにしたい。彼らの指摘する Non-i.i.d.特性，取引費用と市場停滞時間のモデル化は，本研究でも非流動性要因としてより詳しい分析と供に実施する必要があろう。

非流動性という扱いづらい特性のために従来の一期間平均分散モデルの結果を単純に長期の将来に敷衍して解釈することができないことも指摘できた。自ずと長期保有を前提としたポートフォリオの構築方法が，不動産を含むポートフォリオ選択には必要となってくる。しかし，先行研究の多くが採用している一期間モデルは近視眼的であり，現実の投資家の行動を反映しているとはいえない。先行研究は数多く平均分散モデルであるが，仮定する期間は単一期間であり，実際の投資家の状況とは異なる。投資家は複数期間において継続的に投資意思決定を行い，ポートフォリオを組み替えている。つまり近視眼的アプローチではなく，長期的かつ動学的アプローチが必要となる。

また，これまでの先行研究において，長期的視点からポートフォリオ分析を行ったものはあったが，これらも全て拡張型の一期間平均分散モデルであり，ダイナミックに投資家の多段階意思決定を探るものではなかった。動学的最適化を採用するメリットは，長期投資家の意思決定プロセスを追跡して分析できる点にある。通常の一期間分析は，必ず不動産を一定の割合で配分することを示唆する。しかし，投資のタイミングや市場動向によっては不動産を持たない意思決定もされて然るべきである。同意思決定プロセスを分析する場合，一期間モデルでは不十分で，動学的最適化の採用が必要となる。近年の先行研究は長期投資家の視点にたって分析しているものの，動的な再配分を考えていない。これは Cheng *et al*.の研究も同様であり改善の余地を残している。本研究では多段階意思決定モデルへと発展させることを目指したい。

さらに投資家のリスク許容度は無視できない影響をもつ。先行研究においては軽視されてきており，より適切に同要素を反映したポートフォリオ分析が必要となる。投資家のリスク回避度の導入は，より実務に近い分析モデルへと発展させてくれるだろう。本研究では同投資家特性をモデル化の際に組み込み，幅広い投資家にとって洞察を与えられる分析モデルを構築したい。

2　不動産リターンが持つ Non-i.i.d.過程の時系列的解明

2.1　本章の目的

本研究が目指すべきは，Cheng *et al.*(2013)の非流動性を考慮したポートフォリオ分析の発展である。前章にて指摘したとおり，彼らの研究は一般的な一期間平均分散モデルの拡張型に過ぎない。本研究では多段階意思決定モデルへと発展させることを目的としている。まずは，彼らが非流動性の一つとして指摘した Non-i.i.d.過程について着目していきたい。

そこで本章の目的は，Cheng *et al.*(2013)が指摘した不動産リターンの Non-i.i.d.過程の解明である。Cheng *et al.* (2013)は不動産の投資分散が長期保有と供に増幅され長期保有を妨げるとの主張をみせている。この主張をもとに彼らのモデル内でも支配的な役割を与えている。しかし，これは本当だろうか。そもそも，この Non-i.i.d.過程とは何を表すものであろうか。より詳しい整理が必要である。さらに，同特性が，日本の市場においても観測できるのか。観測できれば考慮する必要性があるが，なければ特に考慮する必要はないともいえる。そこで本章では，後の章にてポートフォリオ分析を始めるにあたって，Cheng *et al.* (2013)が指摘する Non-i.i.d.過程を整理し，そして日本の市場において確認していく。

長期ポートフォリオ選択において，将来のリターンの期待値とそのリスク（分散）を予測することは基礎的な作業である。今日では一般的となった所定の時系列分析を通じて予測のための時系列モデルを系統的に構築することは，そのためのポピュラーな方法の 1 つであろう。しかし様々な資産にはそれぞれ固有の時系列的な特性があるはずであり，それに応じて分析のアプローチも若干異なってくることが予想される。ここではまず，不動産のリターンをめぐる先行研究のうち Cheng, Lin, and Liu(2007, 2008, 2010, 2012, 2013，以下「Cheng ら」)が指摘した non-i.i.d.過程の問題に着目し，同じ現象がわれわれのデータでも観測できるのか追試験してみよう。その分析過程を通じて，後節以降の分析作業を組立てるためのヒントが得られるはずである。

2.2　Cheng らの指摘する Non-i.i.d.過程

2.2.1 Non-i.i.d.過程が問題となるとき

さて，そもそも Cheng らが不動産の期間依存性とよぶ Non-i.i.d 過程とはなにか。「不動産をh期間保有するときのリターンの分散は，1 期間保有するときのリターンの分散の h 倍ではなく h^2 倍に近い」というのが，Cheng らが指摘した Non-i.i.d.過程の問題である。これが問題となるのは，長期ポートフォリオ選択に平均分散モデルを適用する際である。一般の金融資産を将来h期間保有するときのリターンの分散は 1 期間保有するときのリターンの分散のh倍であるのに対し，不動産をh期間保有するときのリターンの分散は 1 期間保有するときのリターンの分散のh倍ではなくh^2倍に近い。よって長期の平均分散モデルは 1 期間のものと定式化が異なるという点にある。

定式化して説明するとこうである。金融資産をh期間保有するときのリスク調整済みリターン$r_{adj,L}$は，1 期間当りのリターンの期待値m_Lと分散${\sigma_L}^2$を用いて次式のように表すことができる。なおλはリスク回避度である。

$$r_{adj,L} = hm_L - \lambda h{\sigma_L}^2 \tag{2.2.1.1}$$

これに対し，不動産をh期間保有するときのリスク調整済みリターン$r_{adj,R}$の場合は，1 期間当りのリターンの期待値m_Rと分散${\sigma_R}^2$を用いて次式のようになるという。

$$r_{adj,R} = hm_R - \lambda h^2{\sigma_R}^2 \tag{2.2.1.2}$$

つまりh期間保有のリスクは${\sigma_R}^2$のh^2倍であり，金融資産より速い速度で収益（価格）リスクが増大するという。こうした定式化を使って Cheng らは，従来の調査・研究が単純な 1 期間平均分散モデルを使って示したほどには，長期ポートフォリオにおける現実の不動産の保有率は高くないという現象をうまく説明した。このように，長期ポートフォリオ選択で用いられる平均分散モデルの長期リターンのリスクの定式化に直接かかわってくるという点で，彼らの指摘した Non-i.i.d.過程が無視できない知見となっているのである。

2.2.2 Non-i.i.d.過程と分散

Cheng らは Non-i.i.d.過程を明示的にモデル化していないが，一連の文献からするとその論旨は次のようなことだと考えられる。なお，後のわれわれの追試験と整合的に扱うため，資産のリターンとはすべて対数リターンであるとする。今ある資産の t 期の価格（われわれのデータでは総合収益指数）をX_tとする。これをt 期から $t+1$ 期まで 1 期間保有するときのリターン $r_{t+1}(1)$ は

$$r_{t+1}(1) = \log\left(\frac{X_{t+1}}{X_t}\right) = \log X_{t+1} - \log X_t \tag{2.2.2.1}$$

である。リターンの添字はリターンが実現する期を示すものとする。またかっこ内は保有期間である。さらにt 期から $t+h$ 期まで h 期間保有するときのリターンを $r_{t+h}(h)$ とすると

$$\begin{aligned} r_{t+h}(h) &= \log\left(\frac{X_{t+h}}{X_t}\right) = \log\left(\frac{X_{t+1}}{X_t}\cdot\frac{X_{t+2}}{X_{t+1}}\cdots\frac{X_{t+h}}{X_{t+h-1}}\right) \\ &= r_{t+1}(1) + r_{t+2}(1) + \cdots + r_{t+h}(1) \\ &= r_{t+1} + r_{t+2} + \cdots + r_{t+h} \end{aligned} \tag{2.2.2.2}$$

である。なお誤解がない限り保有期間が 1 のときリターンの(1)の表記を省略する。

ここで，t 期のリターン r_t は，1 期当たりのリターンの期待値 m と確率攪乱項との和で表されるとする。これは Cheng らの一連の研究が行った分析作業から推察されるモデルである。

$$r_t = m + \varepsilon_t \tag{2.2.2.3}$$

これを用いると，(2.2.2.2)式の $r_{t+h}(h)$ は

$$r_{t+h}(h) = hm + (\varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2} + \cdots + \varepsilon_{t+h}) \tag{2.2.2.4}$$

となる。

さてまず，「リターンが i.i.d.過程に従う」とは(2.2.2.3)式において

$$\varepsilon_t \sim \text{i.i.d}\ (0, \sigma^2) \tag{2.2.2.5}$$

であることである。このとき一般にi.i.d $(0, \sigma^2)$に従うh個の確率変数ε_{t+1}，ε_{t+2}，…，ε_{t+h}の線形和

$$s = \phi_1\varepsilon_{t+1} + \phi_2\varepsilon_{t+2} + \cdots + \phi_h\varepsilon_{t+h} \quad （\phi_1，\ \phi_2，\ \cdots，\ \phi_h \text{ は定数}） \tag{2.2.2.6}$$

を考えたとき，その期待値と分散は

$$E[s] = 0 \tag{2.2.2.7}$$

$$Var(s) = {\phi_1}^2\sigma^2 + {\phi_2}^2\sigma^2 + \cdots + {\phi_h}^2\sigma^2 \tag{2.2.2.8}$$

である。(1.3.4)式にこれを用いると

$$\begin{aligned} Var\left(r_{t+h}(h)\right) &= Var(\varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2} + \cdots + \varepsilon_{t+h}) = 1^2\sigma^2 + 1^2\sigma^2 + \cdots + 1^2\sigma^2 \\ &= h\sigma^2 \end{aligned} \tag{2.2.2.9}$$

となる。すなわち，「ある資産の 1 期間のリターンがi.i.d $(0, \sigma^2)$に従うならば，この資産をh 期間保有するときのリターンの分散は$h\sigma^2$となる」ことが言える。

一方その対偶として，「h 期間保有するときのリターンの分散が$h\sigma^2$でないならば，

$$\varepsilon_t \sim \text{ non-i.i.d.} \tag{2.2.2.10}$$

である」ということになる。Cheng らは様々な資産の価格指数のデータをもとに計測した結果，一般の金融資産についてはh 期間保有するときのリターンの分散はほぼ$h\sigma^2$であるが，不動産についてはこれに従わないことを見出した。彼らの計測によれば不動産の場合のh 期間保有の分散はほぼ$h^2\sigma^2$である。なぜh^2となるかは，なんらかのモデルから理論的に導かれたものではなく，彼らの統計的な計測の結果によるファクトファインディングである。これをもって彼らは不動産のリターンは Non-i.i.d.過程だとしているのである。

2.2.3 Non-i.i.d.過程の計測

Cheng らと同じ分析を行って，われわれのデータでも同様な観測結果が得られるか追試験してみることにしよう。分析の方法について Cheng らが明示的に定式化したものがあるわけではないが，Cheng *et al.* (2008)，pp.6-7 の記述にしたがって作業の内容を再現することができる。

今ある資産のT期間にわたる総合収益指数のデータX_1，X_2，…，X_Tがあるとする。以下総合収益指数に基づくリターンはすべて対数リターンで表現するとする。これを用いて次のようにして保有期間ごとのリターンのデータ系列を作ることができる。

① 1 期間保有したときのデータ系列： $(T-1)$ 件

$$\log\left(\frac{X_2}{X_1}\right), \log\left(\frac{X_3}{X_2}\right), \cdots, \log\left(\frac{X_{t+1}}{X_t}\right), \cdots, \log\left(\frac{X_T}{X_{T-1}}\right) \tag{2.2.3.1}$$

$$\rightarrow\ r_2, r_3, \cdots, r_{t+1}, \cdots, r_T$$

② 2 期間保有したときのデータ系列： $(T-2)$ 件

$$\log\left(\frac{X_3}{X_1}\right), \log\left(\frac{X_4}{X_2}\right), \cdots, \log\left(\frac{X_{t+2}}{X_t}\right), \cdots, \log\left(\frac{X_T}{X_{T-2}}\right) \tag{2.2.3.2}$$

$$\rightarrow\ r_3(2), r_4(2), \cdots, r_{t+2}(2), \cdots, r_T(2)$$

③　h期間保有したときのデータ系列：　$(T-h)$ 件

$$\log\left(\frac{X_{1+h}}{X_1}\right), \log\left(\frac{X_{2+h}}{X_2}\right), \cdots, \log\left(\frac{X_{t+h}}{X_t}\right), \cdots, \log\left(\frac{X_T}{X_{T-h}}\right) \tag{2.2.3.3}$$

$$\rightarrow\ r_{1+h}(h), r_{2+h}(h), \cdots, r_{t+h}(h), \cdots, r_T(h)$$

これらのデータ系列を用いて次のようにリターンの記述統計が得られる。

④　h期間保有したときのリターンの平均

$$m(h) = \frac{1}{T-h}\sum_{t=1}^{T-h}(\log X_{t+h} - \log X_t) \tag{2.2.3.4}$$

⑤　h期間保有したときの 1 期間当り換算リターン

$$\bar{m}(h) = \frac{m(h)}{h} \tag{2.2.3.5}$$

⑥　h期間保有したときのリターンの分散

$$\sigma(h)^2 = \frac{1}{T-h}\sum_{t=1}^{T-h}\left(\log X_{t+h} - \log X_t - m(h)\right)^2 \tag{2.2.3.6}$$

⑦　h期間保有したときのリターンの標準偏差を基準化した指数
（1 期間保有の標準偏差で除してスケール調整したもの）

$$\bar{\sigma}(h) = \frac{\sigma(h)}{\sigma(1)} \tag{2.2.3.7}$$

Cheng *et al*. (2010)はこれらを計算し，不動産をh期間保有したときのリターンの平均と標準偏差について次のように述べている。第 1 に，1 期間当り換算リターン$\bar{m}(h)$は，保有期間が変化してもほぼ 1 期間保有のときのリターンmと同じである（図 2.2.3.1）。これは，(2.2.3.4)，(2.2.3.5)，(2.2.2.4)式により

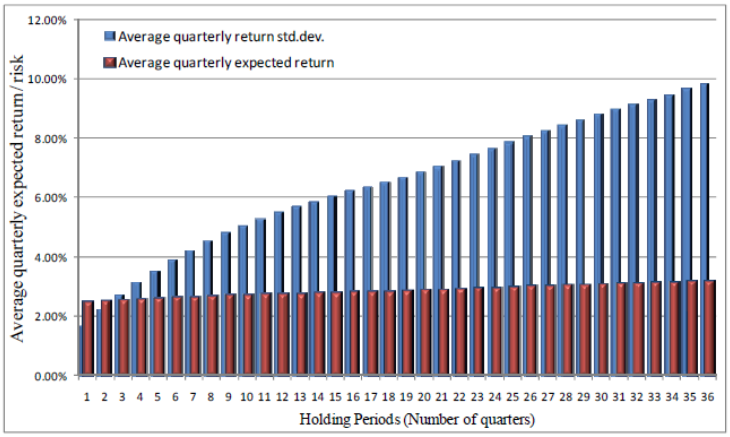
$$\bar{m}(h) = \frac{m(h)}{h} = \frac{1}{h}E[r_{t+h}(h)] = m \tag{2.2.3.8}$$

となることと整合している。よって，逆に長期の平均分散モデルでh期間保有したときのリターンの期待値を定式化するには，1 期間保有のときのリターンmをh倍したhmを適用すればよい。ところがそれに対し，第 2 に，h期間保有の標準偏差$\sigma(h)$（2.2.3.6 式）は，保有期間が長くなるに従い線形的に増大する（図 2.2.3.1）。これは，リターンが i.i.d.特性に従う（$\varepsilon_t \sim$ i. i. d $(0, \sigma^2)$）ならば，(2.2.3.6)，(2.2.2.9)式により

$$\sigma(h) = \sqrt{Var\left(r_{t+h}(h)\right)} = \sqrt{h}\sigma \tag{2.2.3.9}$$

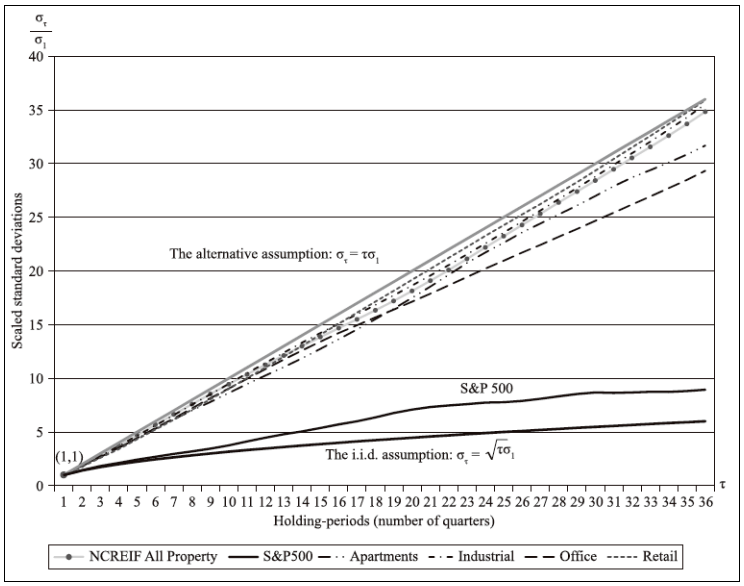
となることと整合しない。むしろ$\sigma(h) = h\sigma$ のように読み取れる。よって長期の平均分散モデルでh期間保有したときのリターンの分散を定式化するには，従来$h\sigma^2$とすればよいと考えられてきたが，そうではなく$h^2\sigma^2$とすべきである。それは，不動産のリターンが Non-i.i.d.過程を有するからである。

図 2.2.3.1　Different Investment Horizons Imply Different Average Return and Risk: $\bar{m}(h)$, $\sigma(h)$



出典: Cheng *et al.* (2010)

図 2.2.3.2　The Risk Curves of NCREIF Indexes (1978Q1–2008Q4): $\bar{\sigma}(h)$



出典：Cheng *et al.* (2013)

2.3　日本データでの検証

Cheng らの指摘する Non-i.i.d.過程が日本でも確認できるのかを試験する。

2.3.1 研究データ

われわれが用いたデータは次のとおりである。株式指数には東京証券取引所の発行する「配当込 TOPIX」を用いる。さらに詳細にわけて分析を行う場合，「配当込 TOPIX500」と「配当込 TOPIX small」を用いる。J-REIT（日本不動産投資信託）には三井住友トラスト基礎研究所の「SMTRI J-REIT 総合指数」を，そして REIT とともに REOC（Real Estate Operating Companies，上場された不動産企業の株式）の動向も観測するため，「配当込東証業種別　不動産業」を採用した。債券には野村証券金融工学研究センター／金融市場調査部の「Nomura BPI 国債除く」，国債には「Nomura BPI 国債のみ」を採用した。不動産には MSCI Inc.の「IPD 不動産投資指数」・「IPD J-REIT 直接不動産投資指数」・「IPD J-REIT ファンド・レベル・リターン指数」を用いる。採用したものはすべて配当込もしくは総合収益を表す指数であり，本論文でリターンと言う場合，特段に言い換える場合を除き，この総合リターンを指す。用いる指数の観測期間は，2001 年 9 月から 2010 年 12 月である。

112 期，月次データ，2001 年 9 月～2010 年，10 変数

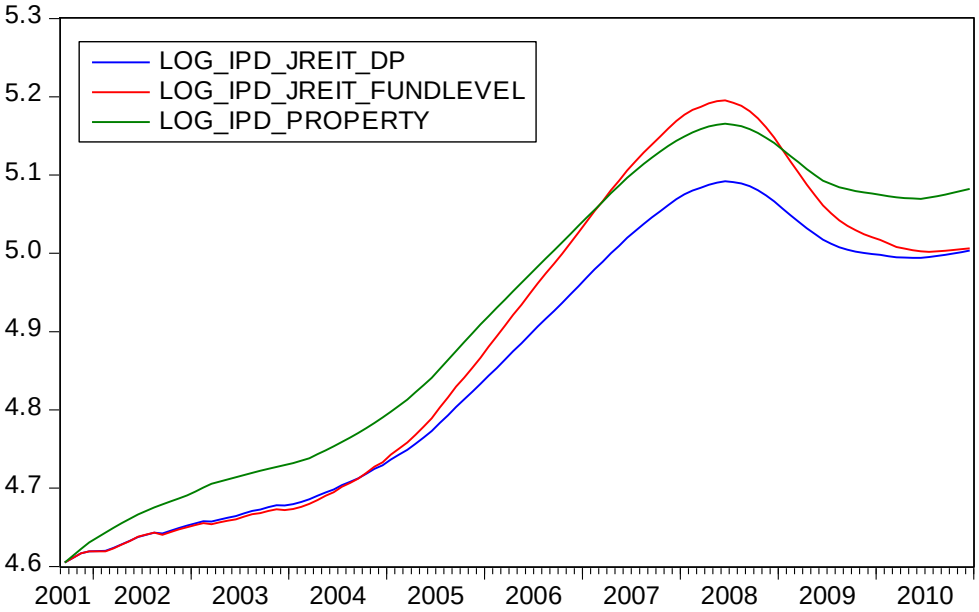
No.	変数名		略称
1	IPD 不動産投資指数	ipd_property	Property
2	IPD J-REIT 不動産投資指数	ipd_jreit_dp	JREIT_IP
3	IPD J-REIT ファンドレベルリターン指数	ipd_jreit_fundlevel	JREIT_FD
4	SMTRI JREIT 指数	smtb_jreit	JREIT_SM
5	東証業種別不動産業指数	tosho_real_estate	TOSHO_RE
6	TOPIX 指数	topix	TOPIX
7	TOPIX500 指数	topix_500	TOPX_500
8	TOPIXsmall 指数	topix_small	TOPX_SML
9	Nomura BPI（国債除く）指数	nomura_bpi_exc_gbond	NG_BOND
10	Nomura BPI（国債のみ）指数	nomura_bpi_gbond	GV_BOND

JREIT直接不動産リターンとJREITファンド・レベル・リターン

本研究では，MSCI Inc.のIPDデータベースから，J-REITのデータのみを抽出してJ-REITヴィークル自体のパフォーマンスに関わる月次リターンを通り推計した。

これら指数を用いる意図は，不動産のNon-i.i.d過程について，より詳細に分析をすすめるためである。

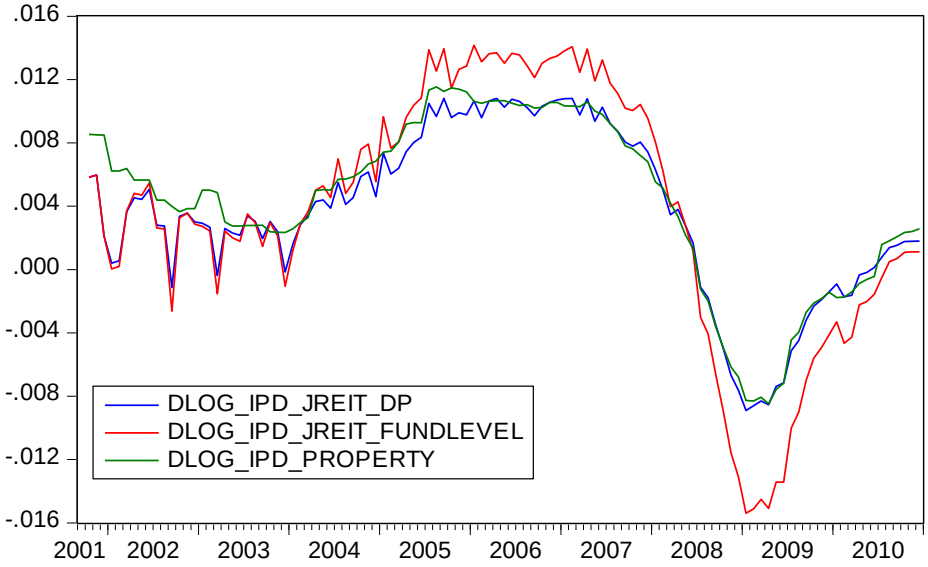
図2.3.1.1　異なる不動産指数（自然対数）の比較



1つ目はJREIT不動産リターンである。これはIPDデータベースからJ-REITの直接不動産投資データのみを抽出しそのリターンを推計したものである。本リターン推計は，前指数のようにスタンディング・インベストメントのみを含むものではなく，J-REITが公表する投資行動に関わる行動のすべてを含んだものである。つまり，これには前指数において除外されている売却，購入，開発等の投資行動が含んだリターンの推計が示されている。

2つ目は，この直接不動産以外の投資行動を含めたリターンである。J-REITは，不動産を主な投資目的物とする投資信託の形態であるが，それ以外の投資行動も行っている。いくつかのJ-REITには国債や株式等の不動産以外の資産も保有しており，借入金によりレバレッジ効果が得られている場合もある。正のリターンがでている場合は，借入金の影響により当該リターンが誇張されるが，負のリターン（損失）がでている場合にも同様に損失を誇張させてしまう。さらに留保している現金の影響を加味すると，この借入金レバレッジの影響度がさがる，つまり，景気時には誇張リターンを押し下げ，不景気時には誇張損失を緩和させる。最後にJ-REITを管理運用している運用会社に対する報酬や支出（ポートフォリオ・レベル・フィー＆コスト）を考慮すると，これらは常にリターンに対して負の影響を与える。このようにリターンに関わる投資行動のすべてを考慮したJ-REITファンド・レベル・リターンは，J-REITヴィークルそれ自体のリターンを示すものである。下図からもわかるとおり，好景気時にはレバレッジ効果によりリターンが増幅され，不景気時には同効果により負のリターンが増幅されている。

図 2.3.1.2 月次リターン（自然対数の一階差）での不動産指数の比較



2.3.2 分析結果

データを用いた分析結果については以下の通りである。

① h期間保有のリターンの平均をもとに 1 期間当りの換算リターン$\bar{m}(h)$を計算したものは（図 2.3.2.1），Cheng *et al.*（図 2.2.3.1）のように保有期間によって一定水準を保つという傾向は見えない。

② 基準化標準偏差 $\bar{\sigma}(h)$ を見ると（図 2.3.2.2），IPD の不動産投資指数，J-REIT 指数，およびファンドレベルリターンの 3 指標については，保有期間 25 期くらいまでは Cheng *et al.* と同様に$\bar{\sigma}(h) = h$ の傾向が観測できる。保有期間がそれより増大するとむしろ$\bar{\sigma}(h)$ は減少に転ずる。一方，国債と社債については$\bar{\sigma}(h) = \sqrt{h}$ に近いが，株式と SMTRI J-REIT 指数については $\bar{\sigma}(h) \neq h$，$\bar{\sigma}(h) \neq \sqrt{h}$である。

さてこれらの観察結果を通じて，不動産に関連する指数について Non-i.i.d.過程が検証されたと言えるだろうか。またその他の金融資産の指数については，どちらかといえば i.i.d.だと言ってよいだろうか。1 期間当りに換算したリターン$\bar{m}(h)$ はなぜ一定した水準ではないのだろうか。このままでは判断がつきかねるのが正直なところである。むしろ$\bar{\sigma}(h)$ が保有期間の増大とともに減少に転ずるのはなぜか，など付随して生ずる疑問もある。

よってここで強引に Non-i.i.d.過程か否かを結論付けるのではなく，新たに生じた疑問を整理し，原因について仮説を立て，追加的な考察を行ってから結論を得ることにしよう。

図 2.3.2.1　保有期間の増大に伴うリターンの平均の変化：　(1)　$m(h)$，　(2) $\bar{m}(h)$

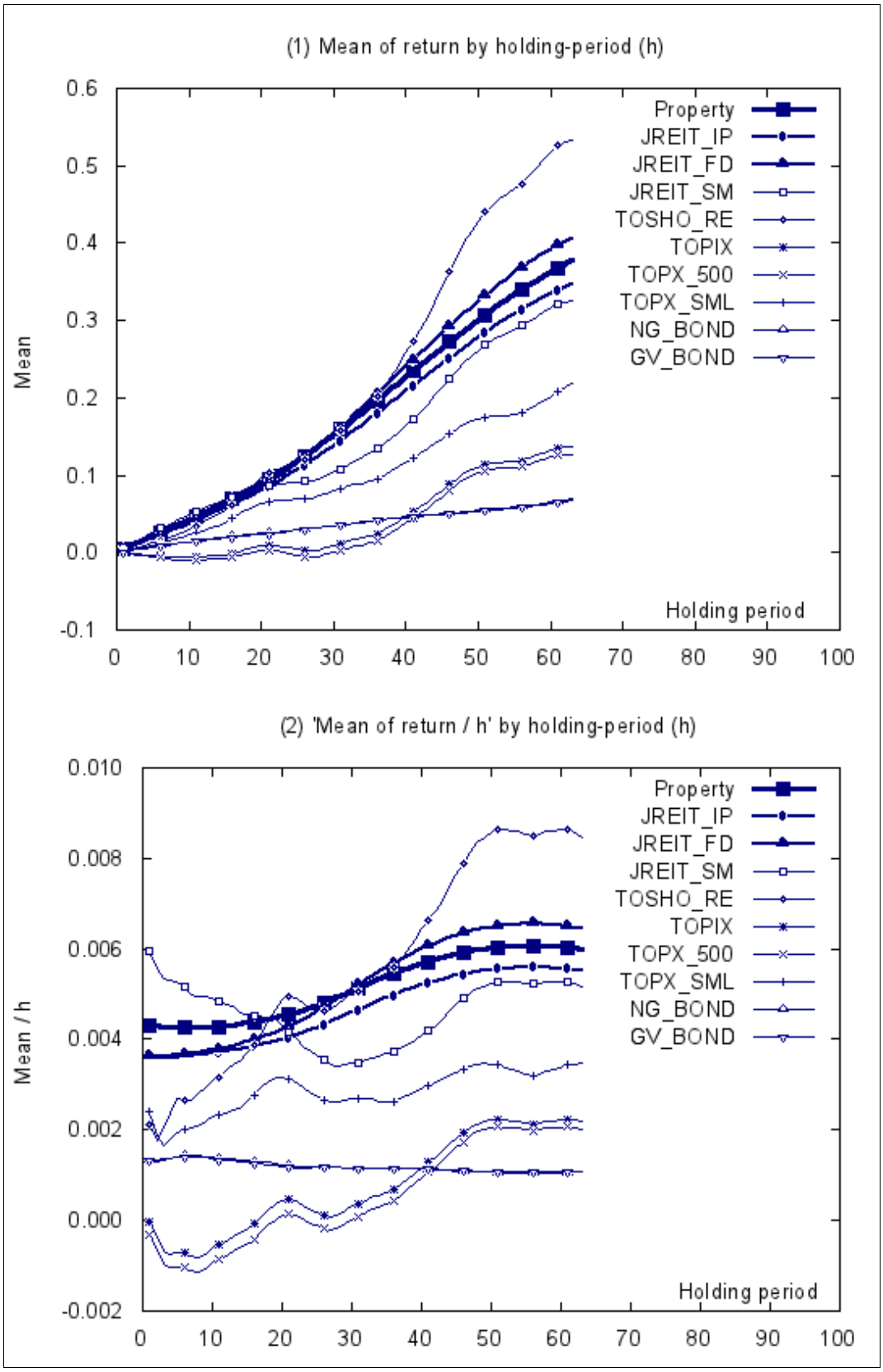
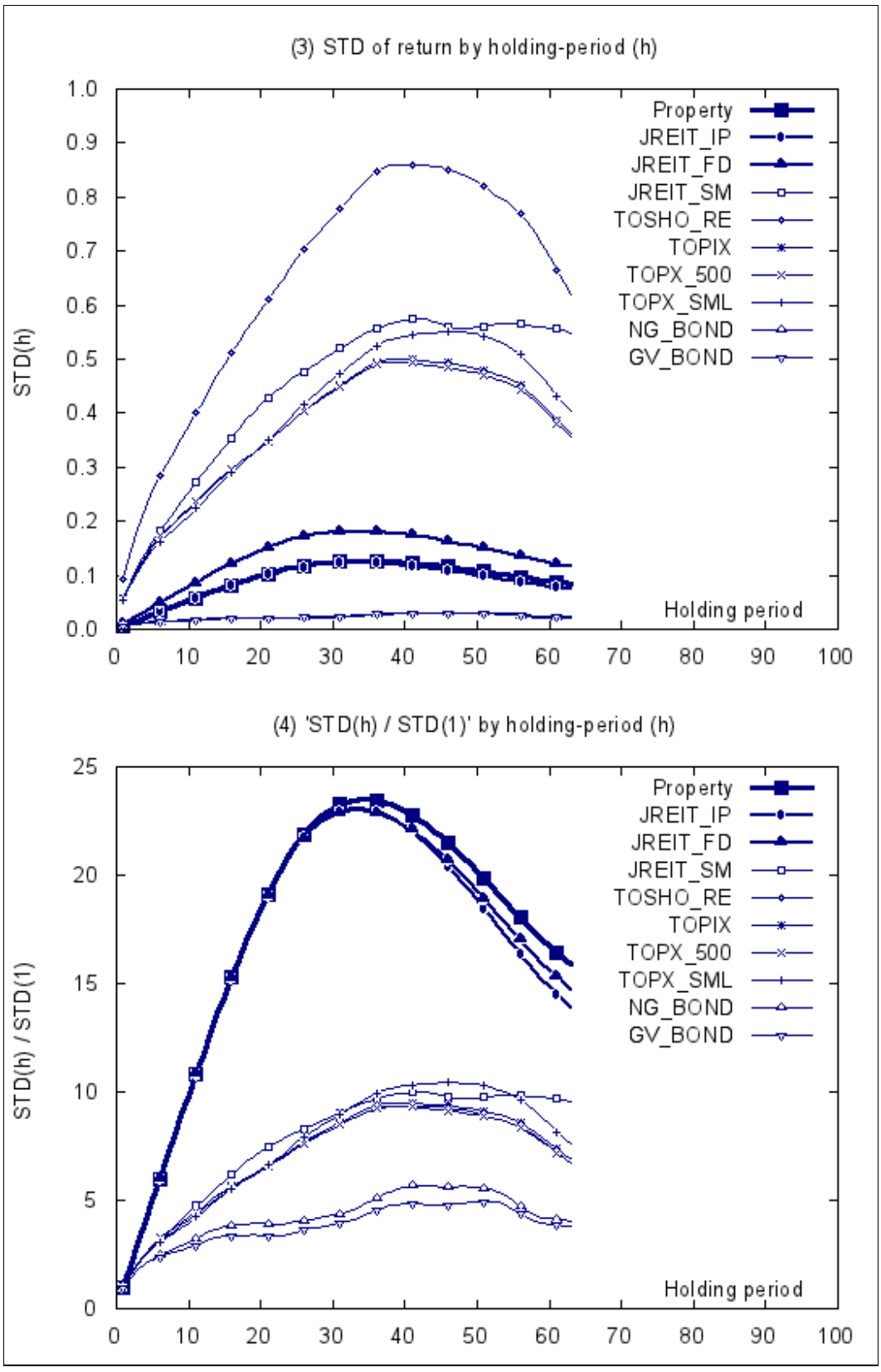


図 2.3.2.2　保有期間の増大に伴うリターンの標準偏差の変化：　(3) $\sigma(h)$，　(4) $\bar{\sigma}(h)$



2.4　仮設データによる解明

第 1 に, 基準化標準偏差 $\bar{\sigma}(h)$ が保有期間の増大とともに減少に転ずる理由について考えよう。これはデータが実体経済の何らかの事象を反映しているというものでもなんでもなく「単にサンプリングの問題ではないか」というのが仮説である。T 期間にわたるデータから(2.2.3.3)式のように h 期間保有するときのデータ系列を作成するとき，保有期間 h が大きくなると$\log(X_{t+h}/X_t)$を計算するときの分母X_tがT 期間の前半だけに偏り，分子のX_{t+h} が後半だけに偏るという現象が起こる。このことがリターンの計算結果に偏りを生じさせているのではないかという仮説である。よって，T 期間という標本期間に対しあまり長い保有期間のデータ系列の作成を望んではいけないのである。

第 2 に，1 期間当りの換算リターン$\bar{m}(h)$ はなぜ一定水準ではないのかという点である。これについても上に挙げた「サンプリング問題」が理由である，というのがここでの仮説である。

第 3 に，本来の検証目的である i.i.d.か non-i.i.d.かの判別問題についてである。(2.2.2.3)式のようにモデルとして $r_t = m + \varepsilon_t$ を仮定し，$\varepsilon_t \sim \text{i.i.d}\,(0, \sigma^2)$ が成立する場合は，確かに基準化標準偏差 $\bar{\sigma}(h)$ は理論的に $\bar{\sigma}(h) = \sqrt{h}$ となる。しかし，これが成立しないとき non-i.i.d.であるが，かといってそれが直ちに $\bar{\sigma}(h) = h$ であることを意味するわけではない。なるほど Cheng *et al.* の図 2.2.3.2 では，不動産関連指数は$\bar{\sigma}(h) = h$ で，金融資産の指数は$\bar{\sigma}(h) = \sqrt{h}$ という 2 分法的な結果であった。しかし，われわれのデータによれば図 2.3.2.1 と図 2.3.2.2 にみるように，2 極の中間に位置づくようなグラフ形状の指数が存在する。そうなる理由は,「non-i.i.d.には多様なバリエーションがある」からだと考えられる。つまり，モデルの基本形が $r_t = m + \varepsilon_t$であっても，ε_t が i.i.d.ではない時系列モデルの過程にしたがう場合である。　例として，定常な自己回帰移動平均過程（ARMA），単位根を含む自己回帰和分移動平均過程（ARIMA）などを挙げることができる。正確にどのような時系列モデルに従うのかを明らかにするのは後の節以降の課題である。ここでは, 何らかの non-i.i.d.過程をモデルとして仮定したとき, 図 2.3.2.1 と図 2.3.2.2 にみるような, $\bar{\sigma}(h) = \sqrt{h}$ と$\bar{\sigma}(h) = h$ との中間に位置するようなグラフ形状が現れ得ることを示せればよい。

2.4.1 分析手法

さて，これら「サンプリング仮説」と「non-i.i.d.過程仮説」とを検証するため，以下のように仮設のデータを生成してこれまでと同様に「h 期間保有リターンの平均と標準偏差」を観測してみることにする。

(1)　「サンプリング仮説」を検証するため，データ件数を 120 期とした場合と，500 期とした場合との 2 ケースについて比べてみる。

(2)　「non-i.i.d.過程仮説」を検証するため，いく通りかの AR 過程を仮定してデータを生成してみる。併せて i.i.d.過程も仮定する。

仮定したケースは次のとおりである。

① i.i.d.ケース

$$r_t = m + \varepsilon_t \tag{2.4.1.1}$$
$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2),\ m = 0.004,\ \sigma = 0.004$$

② AR(1)-1 ケース（単位根過程にかなり近い定常過程）

$$r_t = m + y_t \tag{2.4.1.2}$$
$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \iff (1 - \alpha_1 L) y_t = \varepsilon_t$$
$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2),\ m = 0.004,\ \sigma = 0.004,\ \text{特性根の逆数} \alpha_1 = 0.99$$

③ AR(1)-2 ケース（ふつうの定常過程，2 極の中間に位置づくと予想）

$$r_t = m + y_t \tag{2.4.1.3}$$
$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \iff (1 - \alpha_1 L) y_t = \varepsilon_t$$
$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2),\ m = 0.004,\ \sigma = 0.004,\ \text{特性根の逆数} \alpha_1 = 0.5$$

④ AR(2)ケース（単位根過程にやや近い定常過程，2 極の中間に位置づくと予想）

$$r_t = m + y_t \tag{2.4.1.4}$$
$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t \iff (1 - \alpha_1 L)(1 - \alpha_2 L) y_t = \varepsilon_t$$
$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2),\ m = 0.004,\ \sigma = 0.004,\ \text{特性根の逆数} \alpha_1 = 0.9,\ \alpha_2 = 0.7$$

⑤ AR(3)ケース（単位根過程にやや近い定常過程，2 極の中間に位置づくと予想）

$$r_t = m + y_t$$
$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \phi_3 y_{t-3} + \varepsilon_t \iff (1 - \alpha_1 L)(1 - \alpha_2 L)(1 - \alpha_3 L) y_t = \varepsilon_t \tag{2.4.1.5}$$
$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2),\ m = 0.004,\ \sigma = 0.004,\ \text{特性根の逆数} \alpha_1 = 0.9,\ \alpha_2 = 0.7,\ \alpha_3 = 0.5$$

2.4.2 分析結果

分析結果をみていこう。データ件数 120 期のときの生成データの状況は図 2.5.2.1 である。500 期のときの状況は図 2.4.2.4 である。

第 1 に，基準化標準偏差 $\bar{\sigma}(h)$ を比較すると，120 期ケースでは保有期間が増大すると減少に転ずる現象が依然として存在するが（図 2.4.2.3），500 期ケースになるとそうした現象はきれいに消えて $\bar{\sigma}(h)$ は単調増加になっている（図 2.4.2.6）。

①　つまり「サンプリング仮説」が実証された。やはり，標本期間に対してあまり長い保有期間の分析は適さないわけである。おおまかに標本期間の 1/3 から 1/4 までが限度であろう。

②　図 2.4.2.6 でさらにグラフを読み取ると，単位根過程にかなり近い AR(1)-1 ケースだけがほぼ $\bar{\sigma}(h) = h$ を満たしている。すると直観的に，「$\bar{\sigma}(h) = h$ を満たす過程の 1 つは単位根過程なのか」という新たな仮説が立てられそうである。

③　われわれの実データによる分析結果については，図 2.4.2.1 と図 2.4.2.2 を読み取るときは，保有期間 30 くらいまでのグラフを適切な分析結果として読み取ればよい。すると，IPD 不動産投資指数については Cheng らが示したのと同様に $\bar{\sigma}(h) = h$ に近い傾向が現れていると結論付けることができる。

④　しかも，Cheng らにおいてもわれわれのデータにおいても，それらは単位根過程に近いものではないかと仮説される。ただし，他の時系列モデルの過程からも類似の現象が生ずるかもしれないので，ここだけの観測結果からは単位根過程とは断定できない。その仮説を検証するのはこの後の節の課題である。

第 2 に，1 期間当りの換算リターン$\bar{m}(h)$ についても比較してみよう。120 期ケースでは（図 2.4.2.2）$\bar{m}(h)$ は一定しないが，500 期ケースになると（図 2.4.2.5）$\bar{m}(h)$ はほぼ一定水準を保つことが顕著である。AR 過程のケースとして仮定したモデルの確率攪乱項 y_t は non-i.i.d.だが $\mathrm{E}[y_t] = 0$ を満たすから，こうした結果が得られることは理論的予想と一致するものである。これもまた「サンプリング仮説」が正しいことを検証したことになる。

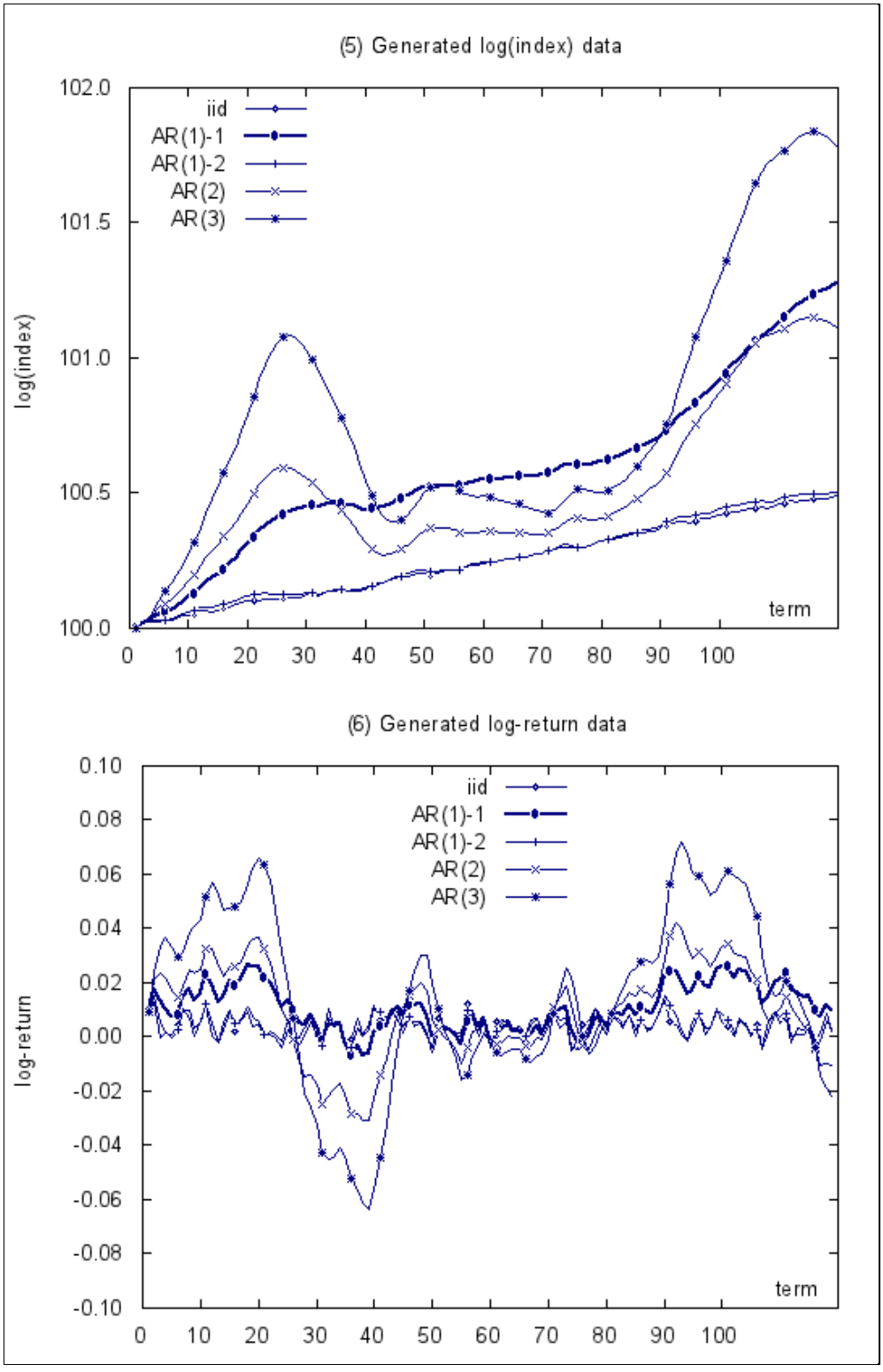
第 3 に，「non-i.i.d.過程仮説」である。図 2.4.2.6 を再度読み取ると，AR(1)-1 ケースは$\bar{\sigma}(h) = h$ に近く，i.i.d.ケースは当然ながら $\bar{\sigma}(h) = \sqrt{h}$ に近い。そしてその 2 極のあいだに位置するのが AR(1)-2 ケース，AR(2)ケース，AR(3)ケースである。つまり，non-i.i.d.過程といっても多様であり，AR 過程だけでもこうした多様なデータ系列を生ずることができた。このことの含意はこうである。

①　non-i.i.d.過程とはいえ，それが AR 過程のような定常過程である可能性があり，その場合には将来を予測するときの予測誤差の増大（分散の増大）は Cheng らが主張するほど大きいものではないかもしれない。

②　一方，単位根過程だとするとその予測誤差は大きく増大することが予想される。

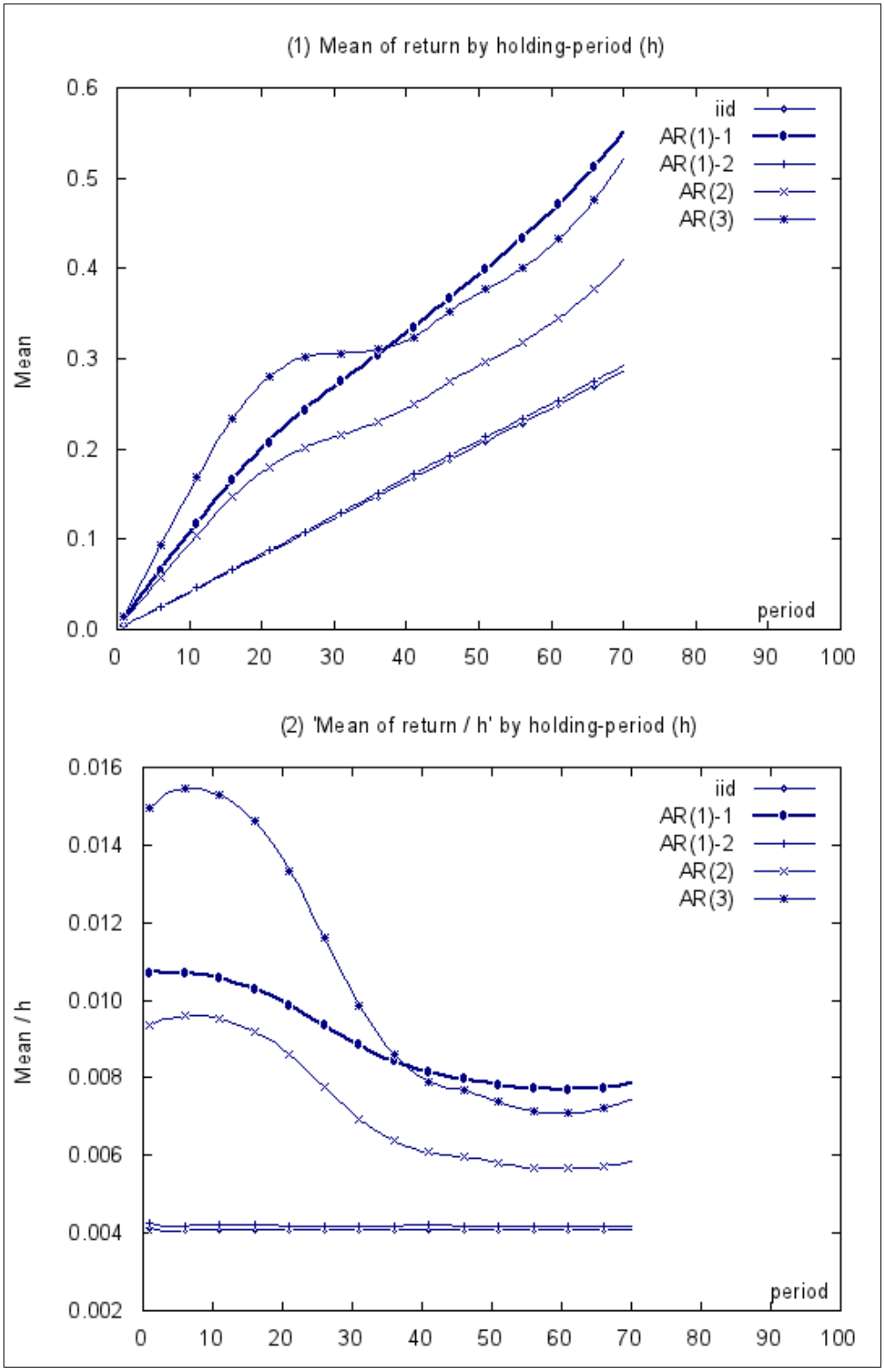
③　いずれにしても，どのような時系列モデルにしたがうのか，またその場合の将来の予測誤差はどれだけのものとして評価されるのか，といったことが後の節での分析課題となる。

図 2.4.2.1　追試験のため生成したデータ（120 期）： (5)原指数（対数）, (6)対数リターン



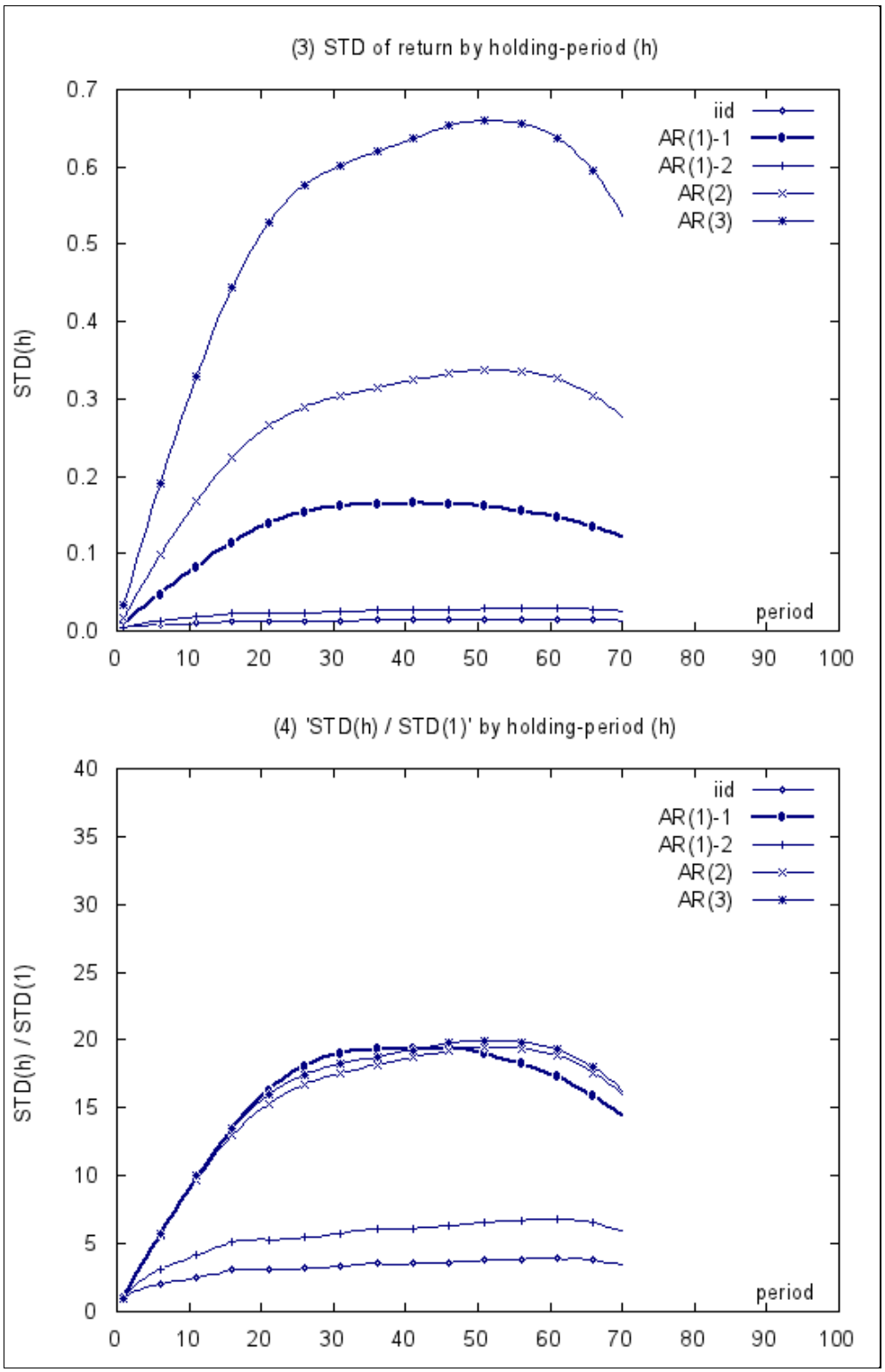
(注)　AR(1)-1 ケース：特性根=0.99,　　AR(1)-2 ケース：特性根=0.5,
　　AR(2)　ケース：特性根=0.9，0.7,　　AR(3)　ケース：特性根=0.9，0.7，0.5

図 2.4.2.2　保有期間の増大に伴うリターンの平均の変化（120 期）：　(1)　$m(h)$，　(2) $\bar{m}(h)$



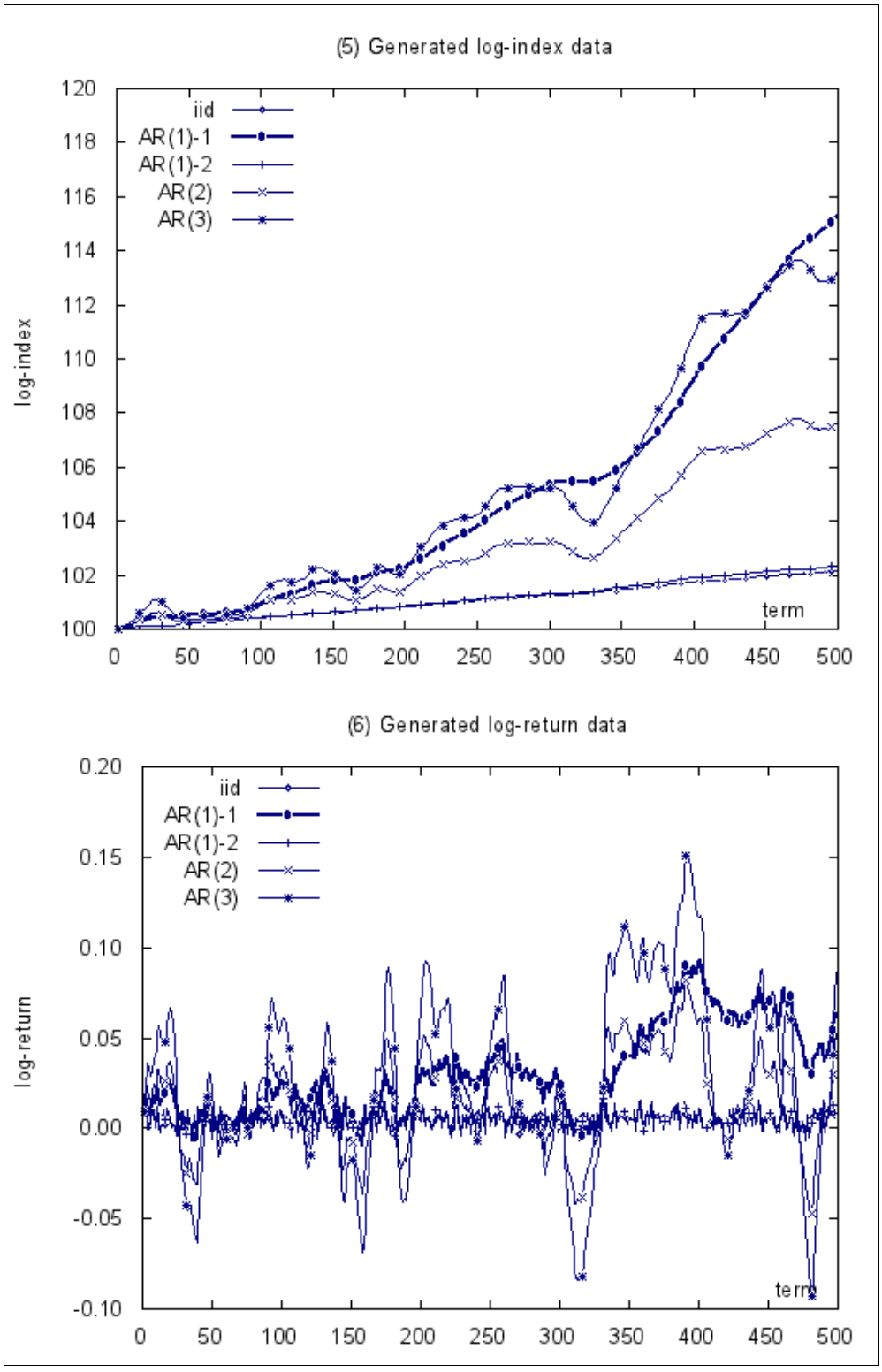
(注)　AR(1)-1 ケース：特性根=0.99,　　AR(1)-2 ケース：特性根=0.5,
　　AR(2)　ケース：特性根=0.9，0.7,　　AR(3)　ケース：特性根=0.9，0.7，0.5

図 2.4.2.3　保有期間の増大に伴うリターンの標準偏差の変化（120 期）：　(3) $\sigma(h)$，(4) $\bar{\sigma}(h)$



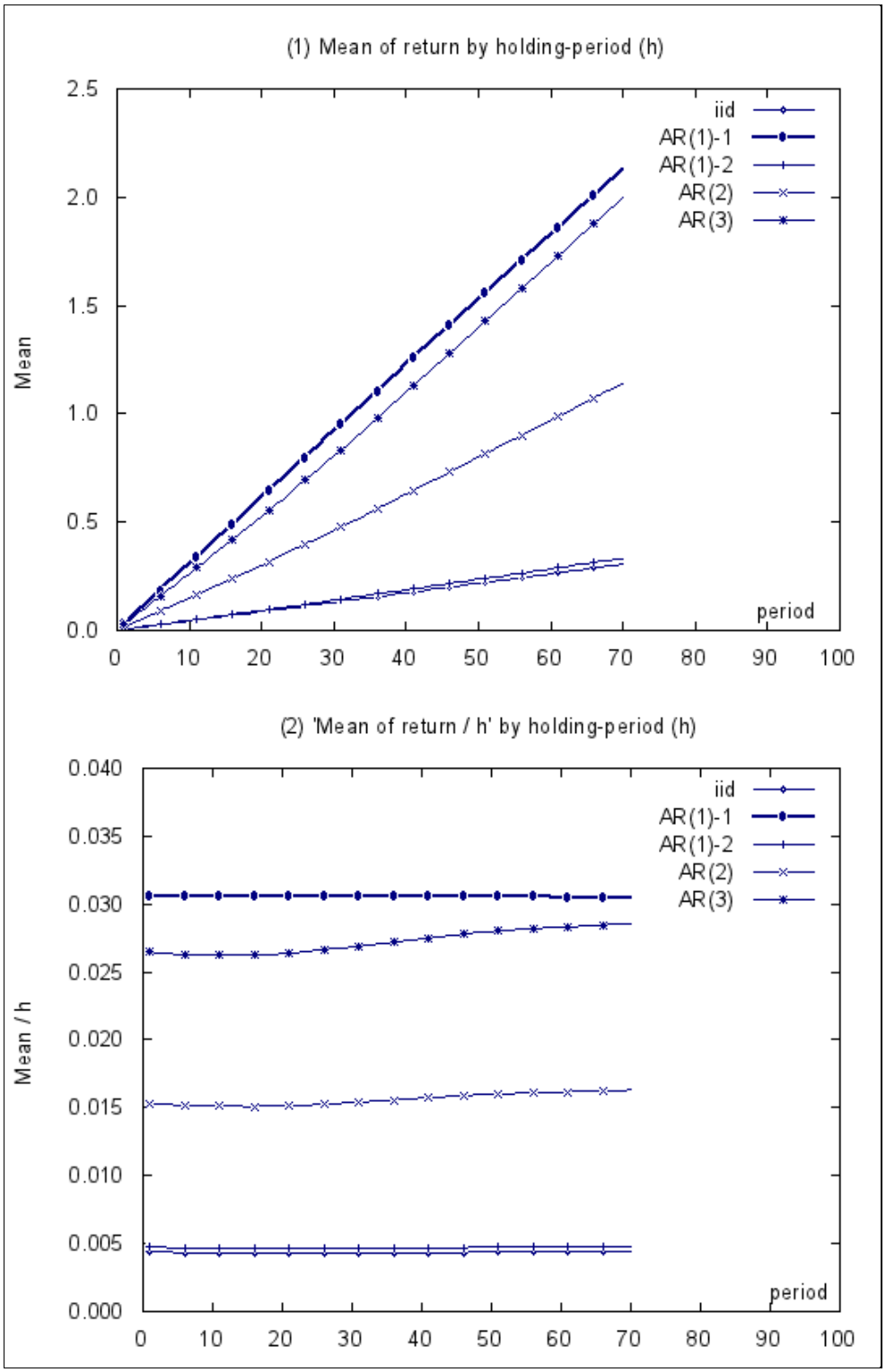
(注)　AR(1)-1 ケース：特性根=0.99,　　AR(1)-2 ケース：特性根=0.5,
　　AR(2)　ケース：特性根=0.9，0.7,　　AR(3)　ケース：特性根=0.9，0.7，0.5

図 2.4.2.4　追試験のため生成したデータ（500 期）：(5)原指数（対数），(6)対数リターン



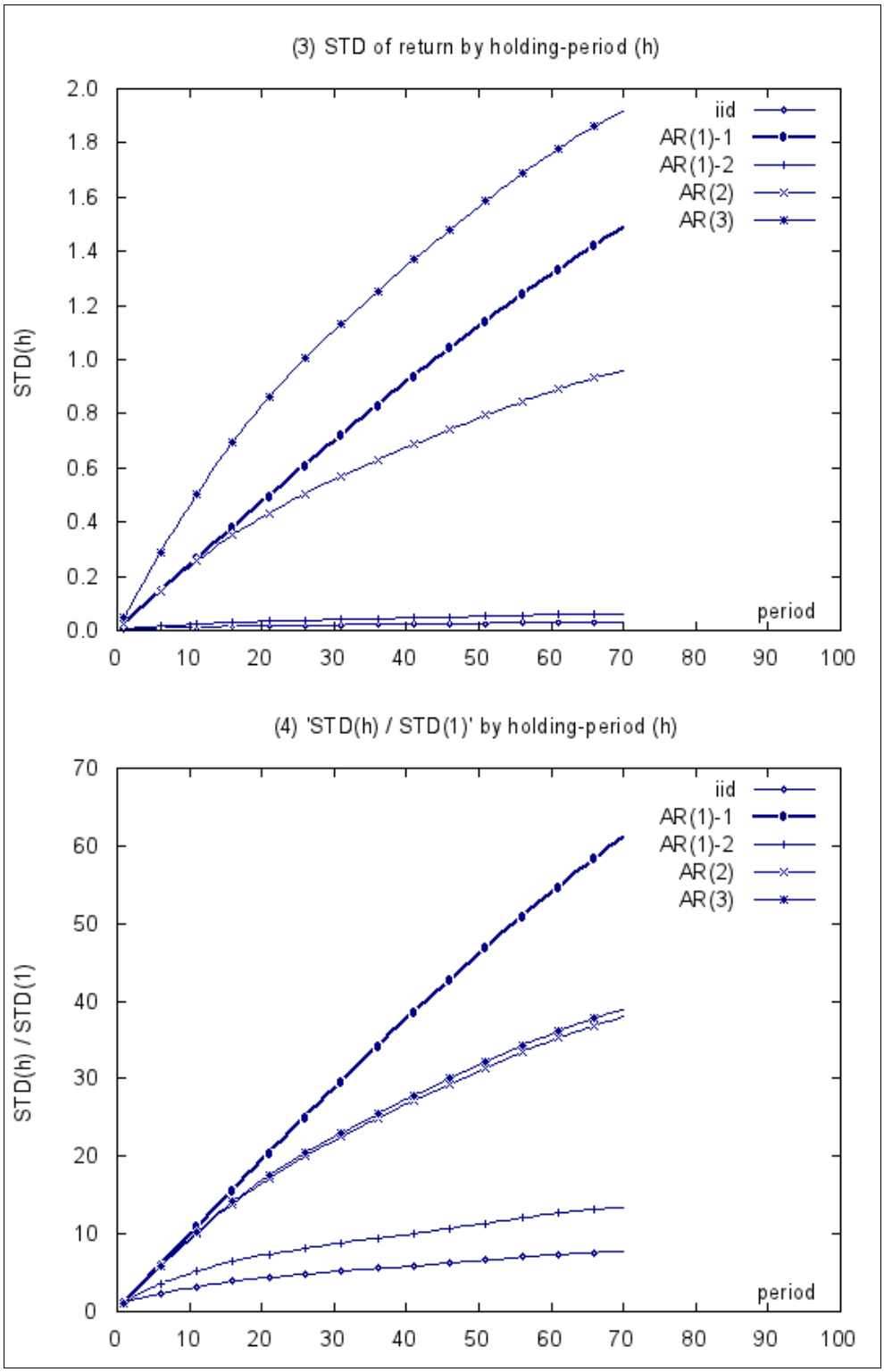
(注)　AR(1)-1 ケース：特性根=0.99,　　AR(1)-2 ケース：特性根=0.5,
　　AR(2) ケース：特性根=0.9，0.7,　　AR(3) ケース：特性根=0.9，0.7，0.5

図 2.4.2.5　保有期間の増大に伴うリターンの平均の変化（500 期）：　(1)　$m(h)$，　(2) $\bar{m}(h)$



(注)　AR(1)-1 ケース：特性根=0.99,　　AR(1)-2 ケース：特性根=0.5,
　　AR(2)　ケース：特性根=0.9，0.7,　　AR(3)　ケース：特性根=0.9，0.7，0.5

図 2.4.2.6　保有期間の増大に伴うリターンの標準偏差の変化（500 期）：　(3) $\sigma(h)$，(4) $\bar{\sigma}(h)$



(注)　AR(1)-1 ケース：特性根=0.99,　　AR(1)-2 ケース：特性根=0.5,
　　AR(2)　ケース：特性根=0.9，0.7,　　AR(3)　ケース：特性根=0.9，0.7，0.5

2.5　ここまでの整理と時系列分析の必要性

われわれのデータにおいても，不動産のリターンには Cheng らが指摘したのと同様の Non-i.i.d.過程，すなわち「リターンの分散が保有期間の 2 乗で増大する傾向」（これを$h^2\sigma^2$法則と呼ぶことにする）があることを観測することができた。ただし SMTRI J-REIT 指数ではそうではない。よって，注意深く言うならば，不動産指数全般について一般的に Non-i.i.d.過程（$h^2\sigma^2$法則）があてはまるというわけではなく，用いる指数によるものと思われる。それでも，株式等の金融資産とは異なる時系列特性があることは注目すべきである。

$h^2\sigma^2$法則の背後には単位根過程があるかもしれないことが示唆された。しかし正確にそうかどうかはここでの分析だけからは断定できない。また$h^2\sigma^2$法則が単位根過程以外の時系列的過程からも生じ得るものなのか，それもここでの分析だけからは断定できない。

Cheng らは資産のリターンが i.i.d.か non-i.i.d. （$h^2\sigma^2$法則）かという 2 分法的な問題設定で分析をしているが，実際には Non-i.i.d.過程とはいえ$h^2\sigma^2$法則には従わない多様な時系列モデルのバリエーションがある。ここでは AR 過程の仮設例を用いてその一部を生成することができた。定常過程であれば将来のポートフォリオ選択におけるリターンのリスク（分散）の予測には予測誤差などの指標を使える可能性がある。つまり Cheng らが指摘するような$h^2\sigma^2$法則だけに注目する必要はないと考える。

Cheng らが行った資産保有期間とリターンとの関連分析は，多分に記述統計の域を出ない。将来のポートフォリオ選択におけるリターンのリスク（分散）の予測という観点から言えば，やはり個々の資産がどのような時系列モデルの過程に従うかをより系統的に分析する必要がある。そうすれば，将来のリスク（分散）が $h^2\sigma^2$法則に従うのか，あるいは別の増大法則に従うのかを見極めることができるであろう。それらはこの後の節の課題である。

2.6　単位根検定からみる不動産の i.i.d 過程

前節まで Cheng らの指摘する Non-i.i.d 過程について整理してきた。しかし，同特性は彼らが記述統計的にまとめたものにすぎない。投資家にとってのリスクとは，投資にあたっての予測誤差である。つまり，不動産のリスクはこの予測誤差の枠組みで議論するほうが適切である。そこで本節では，同特性をより時系列分析の観点から解明していく。

2.6.1 検定の方法

対象とする時系列データが定常過程に従うかどうかの判断は，今後の分析モデルの選択とその結果の解釈を左右する。そこでまず，各時系列データについて単位根検定を行い定常か非定常かを判定することにしよう。単位根検定には，ごく基本的な ADF 検定(Said & Dickey, 1984)と PP 検定(Phillips & Perron, 1988)とを用いる。一般にこれらの検定方法は検出力が弱いといわれる。しかし，ここではむしろ基本的な分析の一部と位置づけて，ひとまずこれらの検定方法で単位根検定を行ってみる。その結果，後に何か問題が生ずるようであれば，その検定方法の改善について後の節で再検討することにしたい。

ADF 検定では次のような 3 種の AR(*p*)モデル（Autoregressive Model，自己回帰モデル）を想定し単位根が含まれていないかどうかを判定する。

① 定数項のみあり: $y_t = a_0 + py_{t-1} + u_t$

② 定数項あり・トレンド項あり: $y_t = a_0 + py_{t-1} + a_2 t + u_t$

③ 定数項なし・トレンド項なし: $y_t = py_{t-1} + u_t$

一方 PP 検定は，特段にラグ次数 p を指定しないノンパラメトリックな方法である。ここでは，各時系列データについて，上の 3 種のケースで ADF 検定と PP 検定とを行った。また，非定常と判断された場合は階差をとって繰返し検定を行った。つまり，レベルデータ，1 階差データ，2 階差データ・・・のように必要に応じて階差を深めて検定を行った。

2.6.2 検定結果の解釈

AR 過程を想定した場合において，すべてのデータにおいてレベル段階では非定常であった。これはそれぞれの原指数の自然対数をとったデータである。 1 階差をとったときに定常となるデータは，TOPIX500，TOPIX small，東証業種別不動産業指数，SMTRI J-REIT 指数，SMTRI J-REIT 指数，Nomura BPI（国債除く）指数，Nomura BPI（国債のみ）指数であった。

一方，IPD 不動産指数，IPD J-REIT 直接不動産投資指数，IPD J-REIT ファンド・レベル・リターン指数は 3 階差をとるまで非定常であるという結果になった。このことから，直接不動産指数および不動産ヴィークル収益指数には単位根過程があり， 3 次以上の階差をとらない限り定常性が得られないことがわかった。

表 2.6.3.1　「定数項のみあり」のモデル

データ名	レベル	1 階差	2 階差	3 階差
IPD 不動産投資指数	非定常	非定常	定常	定常
IPD J-REIT 不動産投資指数	非定常	非定常	非定常	定常
IPD J-REIT ファンド・レベル・リターン指数	非定常	非定常	非定常	定常
SMTRI J-REIT 指数	非定常	定常	定常	定常
東証業種別不動産業指数	非定常	定常	定常	定常
TOPIX 指数	非定常	定常	定常	定常
TOPIX500 指数	非定常	定常	定常	定常
TOPIXsmall 指数	非定常	定常	定常	定常
Nomura BPI（国債除く）指数	非定常	定常	定常	定常
Nomura BPI（国債のみ）指数	非定常	定常	定常	定常

(注) ADF 検定と PP 検定の両方で，有意水準 5%で「H_0 単位根あり」が棄却されたら定常と判断。

表 2.6.3.2　「定数項あり・トレンドあり」のモデル

データ名	レベル	1 階差	2 階差	3 階差
IPD 不動産投資指数	非定常	非定常	非定常	定常
IPD J-REIT 不動産投資指数	非定常	非定常	非定常	定常
IPD J-REIT ファンド・レベル・リターン指数	非定常	非定常	非定常	定常
SMTRI J-REIT 指数	非定常	定常	定常	定常
東証業種別不動産業指数	非定常	定常	定常	定常
TOPIX 指数	非定常	定常	定常	定常
TOPIX500 指数	非定常	定常	定常	定常
TOPIXsmall 指数	非定常	定常	定常	定常
Nomura BPI（国債除く）指数	非定常	定常	定常	定常
Nomura BPI（国債のみ）指数	非定常	定常	定常	定常

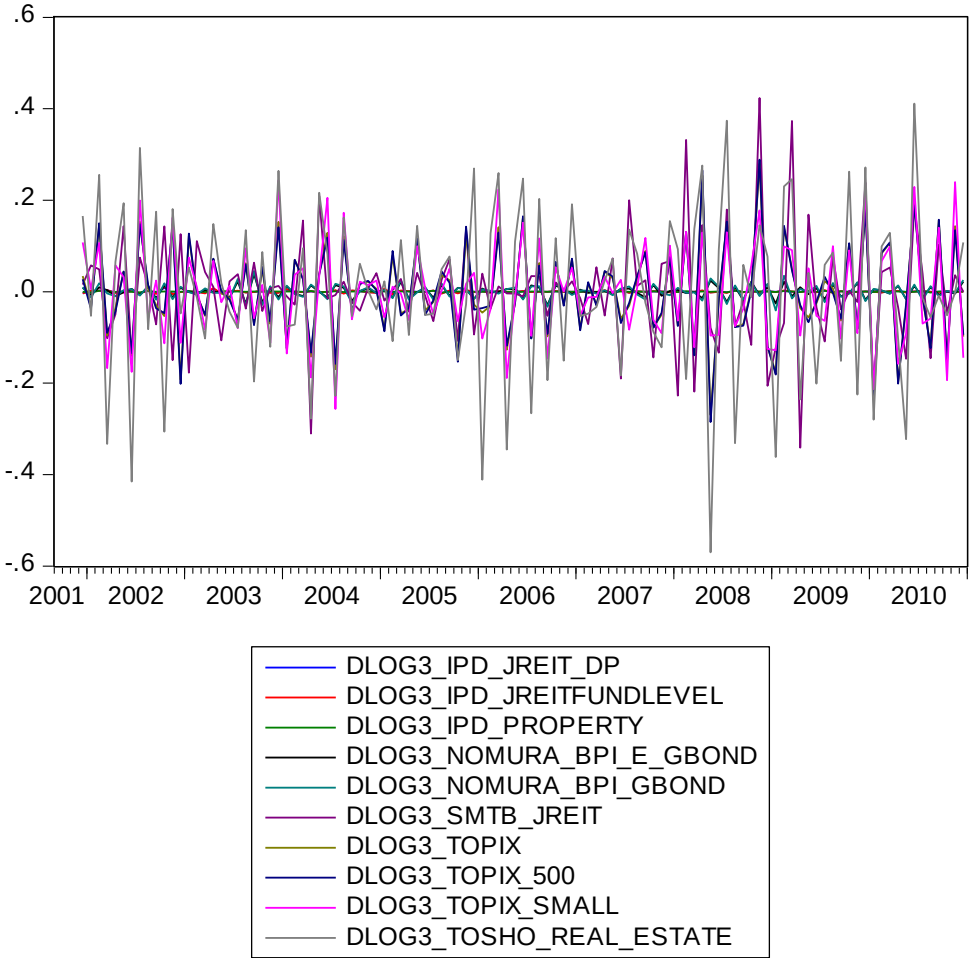
(注) ADF 検定と PP 検定の両方で，有意水準 5%で「H_0 単位根あり」が棄却されたら定常と判断。

表 2.6.3.3　「定数項なし・トレンドなし」のモデル

データ名	レベル	1 階差	2 階差	3 階差
IPD 不動産投資指数	非定常	非定常	定常	定常
IPD J-REIT 不動産投資指数	非定常	非定常	定常	定常
IPD J-REIT ファンド・レベル・リターン指数	非定常	非定常	定常	定常
SMTRI J-REIT 指数	非定常	定常	定常	定常
東証業種別不動産業指数	非定常	定常	定常	定常
TOPIX 指数	非定常	定常	定常	定常
TOPIX500 指数	非定常	定常	定常	定常
TOPIXsmall 指数	非定常	定常	定常	定常
Nomura BPI（国債除く）指数	非定常	定常	定常	定常
Nomura BPI（国債のみ）指数	非定常	定常	定常	定常

(注) ADF 検定と PP 検定の両方で，有意水準 5%で「H_0 単位根あり」が棄却されたら定常と判断。

図 2.6.3.4　各時系列データの変動(3 階差)



2.7　時系列モデルによる予測誤差の検証

2.7.1 ARIMA 過程によるモデル化

投資家がポートフォリオ運営を行う際に注意を払うリスクとは，ポートフォリオ内資産の予測誤差である。投資家は単純な記述的分析を用いるのではなく，条件付分散を用いてポートフォリオを選択していく。同条件付分散より離れる予測出来ない部分こそ投資家にとっての真のリスクであるといえる。

前述においてすべてのデータにはレベル段階において非定常性がある(和分過程が含まれている)ことがわかった。そこで本節では和分過程を含む ARIMA 過程を想定し，時系列モデルを推定してみよう。

対象とするのは，IPD 不動産投資指数，IPD J-REIT 直接不動産投資指数そして IPD J-REIT ファンド・レベル・リターン指数である。これは前節では 2 階差または 3 階差をとると定常になることが分かっている。ここでは 3 階差で十分に定常だとみなし，これに ARMA モデルを適用することで ARIMA モデルを推定することにしよう。

ARIMA(*p*,3,*q*)モデルの次数をいくとおりか設定して推定した結果を下表に示す。このうちから，推定したモデルの係数が t 統計量でみて有意であるようなモデルで，かつ AIC が最小になるような ARIMA モデルを採択することにした。

その結果，IPD 不動産投資指数は ARIMA(2,3,0)が最適なモデルであることがわかった。IPD J-REIT 不動産投資指数では，ARIMA(3,3,3)，IPD J-REIT ファンド・レベル・リターン指数にあっては ARIMA(1,3,3)であることがわかった

表 2.7.1.1　IPD 不動産投資指数の ARIMA(*p*,3,*q*)モデルの推定

過程	t-統計値による係数の検定*	ダービンワトソン値	AIC	AIC による順位
ARIMA(1,3,0)	有意	2.249271	-11.63634	15
ARIMA(2,3,0)	有意	2.012581	-11.81972	4
ARIMA(3,3,0)	－	2.002691	-11.81562	5
ARIMA(0,3,1)	有意	2.154420	-11.75625	10
ARIMA(0,3,2)	－	2.002202	-11.75539	11
ARIMA(0,3,3)	－	2.259920	-11.69331	14
ARIMA(1,3,1)	－	1.900185	-11.75761	9
ARIMA(2,3,1)	－	1.986389	-11.80148	7
ARIMA(2,3,2)	－	1.981241	-11.78296	8
ARIMA(1,3,2)	－	1.894628	-11.74907	12
ARIMA(3,3,1)	－	2.059425	-11.85909	1
ARIMA(3,3,2)	－	1.993292	-11.84226	2
ARIMA(3,3,3)	－	2.019507	-11.83262	3
ARIMA(1,3,3)	－	1.925662	-11.72199	13
ARIMA(2,3,3)	－	2.071434	-11.80739	6

(注) 「H_0: 係数＝0」を有意水準 5%で判定。有意でないとき"－"で表記した。網掛けのものを採用した。

表 2.7.1.2　IPD J-REIT 不動産投資指数の ARIMA(*p*,3,*q*)モデルの推定

過程	t-統計値による係数の検定*	ダービンワトソン値	AIC	AIC による順位
ARIMA(1,3,0)	有意	2.462279	-10.16707	15
ARIMA(2,3,0)	有意	2.125316	-10.29275	14
ARIMA(3,3,0)	有意	1.983980	-10.32613	13
ARIMA(0,3,1)	有意	2.044803	-10.47185	7
ARIMA(0,3,2)	－	1.937600	-10.41223	12
ARIMA(0,3,3)	有意	1.849233	-10.43649	11
ARIMA(1,3,1)	－	2.019667	-10.47093	8
ARIMA(2,3,1)	－	2.023421	-10.50059	2
ARIMA(2,3,2)	－	2.020435	-10.49759	3
ARIMA(1,3,2)	－	2.009334	-10.45255	10
ARIMA(3,3,1)	－	1.947178	-10.49472	4
ARIMA(3,3,2)	－	1.981362	-10.48200	6
ARIMA(3,3,3)	有意	2.060190	-10.77353	1
ARIMA(1,3,3)	－	2.102133	-10.48704	5
ARIMA(2,3,3)	－	1.970446	-10.46855	9

(注) 「H_0: 係数＝0」を有意水準 5%で判定。有意でないとき"－"で表記した。網掛けのものを採用した。

表 2.7.1.3　IPD J-REIT ファンド・レベル・リターン指数の ARIMA(*p*,3,*q*)モデルの推定

過程	t-統計値による係数の検定*	ダービンワトソン値	AIC	AIC による順位
ARIMA(1,3,0)	有意	2.501339	-9.548830	15
ARIMA(2,3,0)	有意	2.150469	-9.684605	14
ARIMA(3,3,0)	有意	1.969329	-9.721495	13
ARIMA(0,3,1)	有意	2.296120	-9.776731	12
ARIMA(0,3,2)	有意	1.990076	-9.800250	11
ARIMA(0,3,3)	有意	1.762022	-9.818560	8
ARIMA(1,3,1)	有意	1.994971	-9.826168	7
ARIMA(2,3,1)	－	2.020583	-9.839336	4
ARIMA(2,3,2)	－	2.009280	-9.831355	6
ARIMA(1,3,2)	－	1.997085	-9.807960	10
ARIMA(3,3,1)	－	1.959198	-9.831586	5
ARIMA(3,3,2)	－	1.966209	-9.815709	9
ARIMA(3,3,3)	－	1.969328	-9.935632	1
ARIMA(1,3,3)	有意	2.058115	-9.848025	3
ARIMA(2,3,3)	－	1.969746	-9.916693	2

(注) 「H_0: 係数＝0」を有意水準 5%で判定。有意でないとき"－"で表記した。網掛けのものを採用した。

表2.7.1.4　採択されたIPD不動産投資指数のARIMA(2,3,0)モデル

変数	係数	標準誤差	T統計値	確率
C	1.19E-05	3.08E-05	0.386679	0.6998
AR(1)	-0.720248	0.088208	-8.165322	0.0000
AR(2)	-0.311628	0.088234	-3.531813	0.0006

決定係数	0.395232	被説明変数の平均	2.28E-05
自由度修正済み決定係数	0.383602	被説明変数の標準偏差	0.000825
回帰標準誤差	0.000647	赤池情報基準	-11.81972
残差平方和	4.36E-05	シュワルツ情報基準	-11.74478
対数尤度	635.3551	阪南クイン基準	-11.78934
F統計値	33.98343	ダービンワトソン値	2.012581
確率(F統計)	0.000000		

AR特性方程式根逆数	-.36-.43i	-.36+.43i

表2.7.1.5　採択されたIPD J-REIT不動産投資指数のARIMA(3,3,3)モデル

変数	係数	標準誤差	T統計値	確率
C	2.06E-06	1.57E-05	0.131583	0.8956
AR(1)	0.746002	0.103967	7.175376	0.0000
AR(2)	-0.328809	0.115801	-2.839430	0.0055
AR(3)	-0.290494	0.087887	-3.305310	0.0013
MA(1)	-2.030412	0.065926	-30.79816	0.0000
MA(2)	1.990448	0.077778	25.59123	0.0000
MA(3)	-0.835094	0.061757	-13.52232	0.0000

決定係数	0.696400	被説明変数の平均	-1.01E-06
自由度修正済み決定係数	0.678000	被説明変数の標準偏差	0.001890
回帰標準誤差	0.001073	赤池情報基準	-10.77353
残差平方和	0.000114	シュワルツ情報基準	-10.59764
対数尤度	577.9972	阪南クイン基準.	-10.70224
F統計値	37.84784	ダービンワトソン値	2.060190
確率(F統計)	0.000000		

AR特性方程式根逆数	.56+.66i	.56-.66i	-.38
MA特性方程式根逆数	.84	.59-.80i	.59+.80i

表2.7.1.6　採択されたIPD J-REITファンド・レベル・リターン指数のARIMA(1,3,3)モデル

変数	係数	標準誤差	T統計値	確率
C	-2.84E-06	7.81E-06	-0.363829	0.7167
AR(1)	0.666424	0.172976	3.852707	0.0002
MA(1)	-1.764283	0.189661	-9.302319	0.0000
MA(2)	1.006748	0.233602	4.309669	0.0000
MA(3)	-0.242445	0.096547	-2.511176	0.0136

決定係数	0.584561	被説明変数の平均	3.59E-05
自由度修正済み決定係数	0.568428	被説明変数の標準偏差	0.002618
回帰標準誤差	0.001720	赤池情報基準	-9.848025
残差平方和	0.000305	シュワルツ情報基準	-9.723852
対数尤度	536.7933	阪南クイン基準.	-9.797677
F統計値	36.23268	ダービンワトソン値	2.058115
確率(F統計)	0.000000		

AR特性方程式根逆数	.67		
MA特性方程式根逆数	1.00	.38-.31i	.38+.31i

2.7.2 GARCH によるボラティリティ変動分析

ここでは IPD 不動産投資指数，IPD J-REIT 直接不動産投資指数そして IPD J-REIT ファンド・レベル・リターン指数の時系列変動に注目して，そのボラティリティの均一性・不均一性を分析することにする。

ここでいうボラティリティは，指数データの変動のうち，前節で採択した ARIMA(2,3,0)モデルで確定的に予測できる部分に対し，予測不可能な個所としてなお残る残差の変動を表す標準偏差(または分散)のことを指している。このボラティリティには，一定の期間に変動が大きく持続する期間がある場合を指摘されており，これはボラティリティ・クラスタリング volatility clustering と呼ばれる。このボラティリティの変動を GARCH モデルで分析することにする。この GARCH 分析は，ボラティリティに対するショックの持続性を図る ARCH 分析に過去のボラティリティを考慮したモデルで Bollerslev (1986)によって提案された：

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \sigma_{t-1}^2 + \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \epsilon_{t-j}^2$$
$$\omega > 0, i = 1,2, \dots, p; j = 1,2, \dots, q$$

GARCH(*p*,*q*)の次数をいくとおりか設定して分析した結果，IPD 不動産投資指数では AIC が最小となるモデルとして GARCH(2,2)が採択された。しかし，推定された係数は ARCH 効果（Resid(-1)^2）

が 10%，その他が 1%の有意水準で有意であった。つまり，「係数の値はゼロである可能性を排除でき，よってボラティリティは分析期間において不均一であるとみなせる」と解釈できる。IPD J-REIT 直接不動産投資指数では GARCH(0,2)が採択されたが，5%の有意水準で有意であり，同様に分散不均一性を認識できる。そして IPD J-REIT ファンド・レベル・リターン指数に関しては，GARCH(1,1)が採択されたが，こちらも 5%の有意水準で有意であり，分散不均一性が認識できた。

表 2.7.2.1　不動産投資関連指数のボラティリティの GARCH(*p*,*q*)モデルの AIC とモデルの採択

IPD不動産投資指数		IPD J-REIT不動産投資指数		IPD J-REITファンド・レベル・リターン指数	
GARCH(0,1)	-11.78254	GARCH(0,1)	-10.84357	GARCH(0,1)	-9.959164
GARCH(0,2)	-11.79599	GARCH(0,2)	-10.85752	GARCH(0,2)	-9.966857
GARCH(1,0)	-11.78526	GARCH(1,0)	-10.60041	GARCH(1,0)	-9.830397
GARCH(1,1)	-11.76409	GARCH(1,1)	-10.77573	GARCH(1,1)	-10.03372
GARCH(1,2)	-11.81355	GARCH(1,2)	-10.79245	GARCH(1,2)	-10.00074
GARCH(2,0)	-11.78198	GARCH(2,0)	-10.66368	GARCH(2,0)	-9.829073
GARCH(2,1)	-11.77050	GARCH(2,1)	-10.76683	GARCH(2,1)	-9.998086
GARCH(2,2)	-11.84527	GARCH(2,2)	-10.74832	GARCH(2,2)	-9.980811

(注)　網掛けのモデルを採択した。

表2.7.2.2　IPD不動産投資指数のボラティリティの分析結果：GARCH(2,2)

変数	係数	標準誤差	z統計値	確率.
C	-2.92E-05	1.98E-05	-1.472548	0.1409
AR(1)	-0.873427	0.046628	-18.73165	0.0000
AR(2)	-0.595667	0.064614	-9.218798	0.0000
Variance Equation				
C	1.25E-07	3.84E-08	3.246900	0.0012
RESID(-1)^2	-0.034229	0.018633	-1.837028	0.0662
RESID(-2)^2	0.593077	0.123436	4.804722	0.0000
GARCH(-1)	0.523534	0.080277	6.521587	0.0000
GARCH(-2)	-0.309847	0.081836	-3.786213	0.0002
決定係数	0.320917	被説明変数の平均		2.28E-05
自由度修正済み決定係数	0.307858	被説明変数の標準偏差		0.000825
回帰標準誤差	0.000686	赤池情報基準		-11.84527
残差平方和	4.89E-05	シュワルツ情報基準		-11.64544
対数尤度	641.7221	阪南クイン基準.		-11.76426
ダービンワトソン値	1.804535			
AR特性方程式根逆数	-.44+.64i	-.44-.64i		

表2.7.2.3　IPD J-REIT不動産投資指数のボラティリティの分析結果：GARCH(0,2)

変数	係数	標準誤差	z統計値	確率.
C	-5.45E-06	2.05E-05	-0.265853	0.7904
AR(1)	-0.475394	0.128353	-3.703806	0.0002
AR(2)	-0.824958	0.071119	-11.59971	0.0000
AR(3)	-0.236595	0.111745	-2.117266	0.0342
MA(1)	-0.608266	0.096736	-6.287906	0.0000
MA(2)	0.915896	0.015502	59.08258	0.0000
MA(3)	-0.697578	0.093288	-7.477711	0.0000
Variance Equation				
C	3.65E-09	9.23E-10	3.958946	0.0001
GARCH(-1)	1.917906	0.035637	53.81735	0.0000
GARCH(-2)	-0.922669	0.033970	-27.16096	0.0000
決定係数	0.628526	被説明変数の平均		-1.01E-06
自由度修正済み決定係数	0.606012	被説明変数の標準偏差		0.001890
回帰標準誤差	0.001187	赤池情報基準		-10.85752
残差平方和	0.000139	シュワルツ情報基準		-10.60626
対数尤度	585.4487	阪南クイン基準.		-10.75568
ダービンワトソン値	1.954114			
AR特性方程式根逆数	-.08-.88i	-.08+.88i	-.31	
MA特性方程式根逆数	.71	-.05+.99i	-.05-.99i	

表 2.7.2.4　IPD J-REIT ファンド・レベル・リターン指数のボラティリティの分析結果 : GARCH(1,1)

変数	係数	標準誤差	z統計値	確率.
C	-2.11E-05	2.94E-05	-0.720425	0.4713
AR(1)	-0.864995	0.207060	-4.177501	0.0000
MA(1)	-0.135488	0.213090	-0.635827	0.5249
MA(2)	-0.498287	0.238693	-2.087568	0.0368
MA(3)	0.187210	0.144713	1.293665	0.1958
Variance Equation				
C	2.65E-09	3.45E-08	0.076573	0.9390
RESID(-1)^2	-0.059757	0.027623	-2.163290	0.0305
GARCH(-1)	1.045954	0.041525	25.18857	0.0000
決定係数	0.536355	被説明変数の平均		3.59E-05
自由度修正済み決定係数	0.518349	被説明変数の標準偏差		0.002618
回帰標準誤差	0.001817	赤池情報基準		-10.03372
残差平方和	0.000340	シュワルツ情報基準		-9.835040
対数尤度	549.8207	阪南クイン基準.		-9.953160
ダービンワトソン値	2.028108			

AR特性方程式根逆数	-.86		
MA特性方程式根逆数	.46-.15i	.46+.15i	-.79

2.7.3 単位根検定・ARIMA モデル・GARCH モデルの再検討

(1)　単位根検定の再検討

前節で，IPD 不動産投資指数，IPD J-REIT 不動産投資指数，IPD J-REIT ファンド・レベル・リターン指数という 3 種類の不動産投資関連指数が 1 階差をとっただけでは定常にならないことを見た(表 2.7.2.1，表 2.7.2.2，表 2.7.2.3)。さらにその結果は，2 階差をとっても定常ではないかもしれないことを示唆している。

しかし実際には階差をとり過ぎれば過剰階差となって有用な情報を損失することになり好ましいことではない。そこでここでは，これら 3 つの指数データについて，改めて別の検定方法を用いて単位根検定をやり直してみることにしよう。

先に用いた ADF 検定，PP 検定は帰無仮説「H_0：単位根あり」を検定するものであった。一般にその検出力は弱いといわれている。つまり，単位根がなく定常過程が真であるとしても，検出力が弱いため帰無仮説「H_0：単位根あり」を棄却できず，誤って非定常過程として採択してしまう危険性がある。そこでここでは，これらの検定を改良した DF-GLS 検定(Elliott *et al.*, 1996)と NP

検定(Ng & Perron, 2001)，さらに視点を変えた KPSS 検定(Kwiatkowski *et al.*, 1992)を用いて検定をやり直してみることにする。DF-GLS 検定は，ADF 検定を改良したもので，同じく帰無仮説「H_0：単位根あり」を検定するものである。NP 検定は，PP 検定を改良したもので，同じく帰無仮説「H_0：単位根あり」を検定するものである。一方，KPSS 検定は逆に帰無仮説「H_0：単位根なし」を検定するものである。

なお，検定にかけるモデル式の仮定についてであるが，前節では機械的に「定数項あり・トレンドあり」のケースを階差データに対しても適用した。しかしよく考えてみると時間 t を含むトレンド項が効くのは，原指数を意味するレベルデータに対してのことであろうと考えられる。つまり原指数の上昇基調などを表現するときに有効になるものであろう。一方，階差をとって収益率ベースの指標にしたときは，それが一方的に上昇基調などになるとは考え難い。こうした理由から，ここでは階差データに対しては「定数項あり・トレンドあり」のケースの検定を行わないことにした。

さて，単位根検定の結果は次に示す表 2.7.3.1，表 2.7.3.2，表 2.7.3.3 のようになる。これをみると，まず IPD 不動産投資指数(表 2.7.3.1)については，2 階差をとれば定常になるようである。実は，前節の検定でも，階差データにおける「定数項あり・トレンドあり」ケースを除けば，2 階差で定常であることがすでに示されている。よって改めてここでも同じ結果が得られたことになる。

一方，IPD J-REIT 不動産投資指数(表 2.7.3.2)と IPD J-REIT ファンド・レベル・リターン指数(表 2.7.3.3)については，1 階差をとればほぼ定常であることがここでの検定で示されている。先の節の検定では 3 階差をとらないと定常にならないと判断されたのと大きく異なっている。

表 2.7.3.1　IPD 不動産投資指数

検定の種類	検定統計量	レベル (定数項あり)	レベル (定数項・トレンドあり)	1 階差 (定数項あり)	2 階差 (定数項あり)
DG-GLS	t	－　非定常	＊　定常	－　非定常	＊＊＊　定常
NP	MZa	－　非定常	＊＊＊　定常	－　非定常	＊＊＊　定常
	MZt	－　非定常	＊＊＊　定常	－　非定常	＊＊＊　定常
	MSB	－　非定常	＊＊＊　定常	－　非定常	＊＊＊　定常
	MPT	－　非定常	＊＊＊　定常	－　非定常	＊＊＊　定常
KPSS	LM	†††非定常	††　非定常	†　非定常	＝　定常

－：「H_0単位根あり」を棄却できない。非定常。
＊：10%有意水準で「H_0単位根あり」を棄却。定常。
＊＊：5%有意水準で同上。
＊＊＊：1%有意水準で同上。
＝：「H_0単位根なし」を棄却できない。定常。
†：10%有意水準で「H_0単位根なし」を棄却。非定常。
††：5%有意水準で同上。
†††：1%有意水準で同上。

表 2.7.3.2　IPD J-REIT 不動産投資指数

検定の種類	検定統計量	レベル (定数項あり)	レベル (定数項・トレンドあり)	1 階差 (定数項あり)	2 階差 (定数項あり)
DG-GLS	t	－　非定常	－　非定常	＊　定常	＊＊＊　定常
NP	MZa	－　非定常	＊＊＊　定常	＊＊　定常	－　非定常
	MZt	－　非定常	＊＊＊　定常	＊＊　定常	－　非定常
	MSB	－　非定常	＊＊＊　定常	＊＊　定常	－　非定常
	MPT	－　非定常	＊＊＊　定常	＊＊　定常	－　非定常
KPSS	LM	†††非定常	††　非定常	＝　定常	＝　定常

－：「H0 単位根あり」を棄却できない。非定常。
＊：10%有意水準で「H0 単位根あり」を棄却。定常。
＊＊：5%有意水準で同上。
＊＊＊：1%有意水準で同上。
＝：「H0 単位根なし」を棄却できない。定常。
†：10%有意水準で「H0 単位根なし」を棄却。非定常。
††：5%有意水準で同上。
†††：1%有意水準で同上。

表 2.7.3.3　IPD J-REIT ファンド・レベル・リターン指数

検定の種類	検定統計量	レベル (定数項あり)	レベル (定数項・トレンドあり)	1 階差 (定数項あり)	2 階差 (定数項あり)
DG-GLS	t	－　非定常	＊＊＊　定常	＊　定常	＊　定常
NP	MZa	－　非定常	＊＊＊　定常	＊＊＊　定常	－　非定常
	MZt	－　非定常	＊＊＊　定常	＊＊＊　定常	－　非定常
	MSB	－　非定常	＊＊＊　定常	＊＊　定常	－　非定常
	MPT	－　非定常	＊＊＊　定常	＊＊＊　定常	－　非定常
KPSS	LM	†††非定常	††　非定常	＝　定常	＝　定常

－：「H0 単位根あり」を棄却できない。非定常。
＊：10%有意水準で「H0 単位根あり」を棄却。定常。
＊＊：5%有意水準で同上。
＊＊＊：1%有意水準で同上。
＝：「H0 単位根なし」を棄却できない。定常。
†：10%有意水準で「H0 単位根なし」を棄却。非定常。
††：5%有意水準で同上。
†††：1%有意水準で同上。

(2)　ARIMA モデルの再検討

3 つの指数データについて和分次数が定まったので，引き続き ARIMA モデルを推定してみることにしよう。表 2.7.3.4 にいくつかのケースの推定結果の AIC をまとめた。これに基づいてモデルを選択するとともに，係数の t 検定についても検討した。

表 2.7.3.4　不動産投資関連指数の ARIMA(*p*,*d*,*q*)モデルの AIC とモデルの採択

IPD不動産投資指数		IPD J-REIT不動産投資指数		IPD J-REITファンド・レベル・リターン指数	
ARIMA(0,2,1)	-11.59623	ARIMA(0,1,1)	-8.605107	ARIMA(0,1,1)	-7.834070
ARIMA(0,2,2)	-11.66782	ARIMA(0,1,2)	-9.312862	ARIMA(0,1,2)	-8.570446
ARIMA(0,2,3)	-11.75034	ARIMA(0,1,3)	-9.650005	ARIMA(0,1,3)	-8.911661
ARIMA(1,2,0)	-11.65302	ARIMA(1,1,0)	-10.44754	ARIMA(1,1,0)	-9.811300
ARIMA(1,2,1)	-11.78496	ARIMA(1,1,1)	-10.43390	ARIMA(1,1,1)	-9.797042
ARIMA(1,2,2)	-11.80304	ARIMA(1,1,2)	-10.46782	ARIMA(1,1,2)	-9.851783
ARIMA(1,2,3)	-11.78927	ARIMA(1,1,3)	-10.47484	ARIMA(1,1,3)	-9.855876
ARIMA(2,2,0)	-11.75534	ARIMA(2,1,0)	-10.42621	ARIMA(2,1,0)	-9.789347
ARIMA(2,2,1)	-11.79842	ARIMA(2,1,1)	-10.44223	ARIMA(2,1,1)	-9.800459
ARIMA(2,2,2)	-11.83564	ARIMA(2,1,2)	-10.42962	ARIMA(2,1,2)	-9.787061
ARIMA(2,2,3)	-11.81773	ARIMA(2,1,3)	-10.48899	ARIMA(2,1,3)	-9.831347
ARIMA(3,2,0)	-11.88992	ARIMA(3,1,0)	-10.50946	ARIMA(3,1,0)	-9.850260
ARIMA(3,2,1)	-11.87169	ARIMA(3,1,1)	-10.51458	ARIMA(3,1,1)	-9.929770
ARIMA(3,2,2)	-11.86080	ARIMA(3,1,2)	-10.64948	ARIMA(3,1,2)	-9.912308
ARIMA(3,2,3)	-11.85216	ARIMA(3,1,3)	-10.63151	ARIMA(3,1,3)	-9.851022

(注)　網掛けのモデルを採択した。

表 2.7.3.5　IPD 不動産投資指数の ARIMA(3,2,0)モデル

変数	係数	標準誤差	t-統計値	確率.
C	1.91E-05	0.000194	0.098580	0.9217
AR(1)	0.178951	0.090825	1.970288	0.0515
AR(2)	0.297881	0.088127	3.380142	0.0010
AR(3)	0.210365	0.090902	2.314183	0.0226

決定係数	0.312021	被説明変数の平均	-3.41E-05
自由度修正済み決定係数	0.291983	被説明変数の標準偏差	0.000739
回帰標準誤差	0.000622	赤池情報基準	-11.88992
残差平方和	3.99E-05	シュワルツ情報基準	-11.79000
対数尤度	640.1108	阪南クイン基準.	-11.84942
F統計値	15.57128	ダービンワトソン値	1.973596
確率(F統計)	0.000000		

AR特性方程式根逆数	.84	-.33+.38i	-.33-.38i

表 2.7.3.6　IPD J-REIT 不動産投資指数の ARIMA(3,1,2)モデル

変数	係数	標準誤差	t-統計値	確率.
C	0.004154	0.004163	0.997785	0.3207
AR(1)	1.127003	0.076717	14.69041	0.0000
AR(2)	-0.790624	0.110064	-7.183320	0.0000
AR(3)	0.618196	0.076519	8.078976	0.0000
MA(1)	-0.267369	0.020196	-13.23894	0.0000
MA(2)	0.983362	0.010883	90.35934	0.0000

決定係数	0.956416	被説明変数の平均	0.003559
自由度修正済み決定係数	0.954280	被説明変数の標準偏差	0.005364
回帰標準誤差	0.001147	赤池情報基準	-10.64948
残差平方和	0.000134	シュワルツ情報基準	-10.50048
対数尤度	581.0721	阪南クイン基準.	-10.58907
F統計値	447.6666	ダービンワトソン値	2.037983
確率(F統計)	0.000000		

AR特性方程式根逆数	.97	.08+.79i	.08-.79i
MA特性方程式根逆数	.13+.98i	.13-.98i	

表 2.7.3.7　IPD J-REIT ファンド・レベル・リターン指数の ARIMA(3,1,0)モデル

変数	係数	標準誤差	t-統計値	確率.
C	0.003504	0.006143	0.570455	0.5696
AR(1)	0.919764	0.093783	9.807390	0.0000
AR(2)	0.260877	0.126053	2.069589	0.0410
AR(3)	-0.207691	0.093787	-2.214483	0.0290

決定係数	0.954415	被説明変数の平均	0.003586
自由度修正済み決定係数	0.953100	被説明変数の標準偏差	0.007968
回帰標準誤差	0.001726	赤池情報基準	-9.850260
残差平方和	0.000310	シュワルツ情報基準	-9.750922
対数尤度	535.9141	阪南クイン基準.	-9.809982
F統計値	725.8190	ダービンワトソン値	2.110763
確率(F統計)	0.000000		

AR特性方程式根逆数	.97	.44	-.49

IPD 不動産投資指数については AIC の最も小さい ARIMA(3,2,0)モデルを採択することができる。ただしその場合 AR(1)の係数の推定値については t 統計量が 5%有意水準を満たさない結果となっている(表 2.7.3.5)。しかしそう致命的なものではない。

IPD J-REIT 不動産投資指数については同じく AIC の最も小さい ARIMA(3,1,2) モデルを採択することができる。係数の推定値も十分に有意である(表 2.7.3.6)。

IPD J-REIT ファンド・レベル・リターン指数についてはやや注意を要する。これについても AIC が最小となる ARIMA(3,1,1)を採択したいが，分析結果によると推定された AR 過程の特性方程式の根の絶対値が 1 より小さいため定常な ARIMA 過程にならない。次の順位の AIC の ARIMA(3,1,2)も同じ理由から定常とならない。さらに次の ARIMA(3,1,3)は定常であるが係数の推定値が有意水準を満たさない。結局 ARIMA(3,1,0)が，AIC も小さく係数の推定値も有意水準を満たし，AR 過程の特性方程式の根の絶対値が 1 より大きく定常であるので，これを採択することとしたい(表 2.7.3.7)。

(3)　GARCH モデルの再検討

次にボラティリティの変動を推定する GARCH モデルについて検討する。それぞれの指数について，上で推定された ARIMA モデルを適用しその残差に対し，GARCH モデルを適用した結果の AIC をまとめたものが表 2.7.3.8 である。ここでも AIC の最も小さいものをモデルとして採択する。

表 2.7.3.8　不動産投資関連指数のボラティリティの GARCH(*p*,*q*)モデルの AIC とモデルの採択

IPD不動産投資指数		IPD J-REIT不動産投資指数		IPD J-REITファンド・レベル・リターン指数	
GARCH(0,1)	-11.85375	GARCH(0,1)	-10.77015	GARCH(0,1)	-10.02228
GARCH(0,2)	-11.87654	GARCH(0,2)	-10.74976	GARCH(0,2)	-10.00145
GARCH(1,0)	-11.91054	GARCH(1,0)	-10.65659	GARCH(1,0)	-9.857101
GARCH(1,1)	-11.90749	GARCH(1,1)	-10.85913	GARCH(1,1)	-9.971706
GARCH(1,2)	-11.87287	GARCH(1,2)	-10.86976	GARCH(1,2)	-9.954552
GARCH(2,0)	-11.90675	GARCH(2,0)	-10.78099	GARCH(2,0)	-9.852299
GARCH(2,1)	-11.87650	GARCH(2,1)	-10.73180	GARCH(2,1)	-9.955249
GARCH(2,2)	-11.86413	GARCH(2,2)	-10.74781	GARCH(2,2)	-9.936973

(注)　網掛けのモデルを採択した。

表 2.7.3.9　IPD 不動産投資指数の GARCH(1,0)モデル

変数	係数	標準誤差	z統計値	確率.
C	-9.43E-05	0.000147	-0.642632	0.5205
AR(1)	0.114786	0.055194	2.079679	0.0376
AR(2)	0.288602	0.083553	3.454123	0.0006
AR(3)	0.191378	0.086853	2.203458	0.0276
Variance Equation				
C	3.88E-07	3.66E-08	10.60327	0.0000
RESID(-1)^2	-0.059362	0.044060	-1.347293	0.1779

決定係数	0.302465	被説明変数の平均	-3.41E-05
自由度修正済み決定係数	0.282148	被説明変数の標準偏差	0.000739
回帰標準誤差	0.000627	赤池情報基準	-11.91054
残差平方和	4.04E-05	シュワルツ情報基準	-11.76066
対数尤度	643.2140	阪南クイン基準.	-11.84978
ダービンワトソン値	1.827749		

AR特性方程式根逆数	.79	-.34-.36i	-.34+.36i

表 2.7.3.10　IPD J-REIT 不動産投資指数の GARCH(1,2)モデル

変数	係数	標準誤差	z統計値	確率.
C	0.001965	0.002323	0.845658	0.3977
AR(1)	1.542757	0.282295	5.465059	0.0000
AR(2)	-0.274259	0.534312	-0.513294	0.6077
AR(3)	-0.285390	0.258104	-1.105721	0.2688
MA(1)	-0.646301	0.283864	-2.276799	0.0228
MA(2)	0.103343	0.224164	0.461014	0.6448
	Variance Equation			
C	1.17E-09	1.66E-08	0.070493	0.9438
RESID(-1)^2	-0.095054	0.063666	-1.493013	0.1354
GARCH(-1)	0.489578	0.719880	0.680084	0.4965
GARCH(-2)	0.565767	0.737797	0.766833	0.4432
決定係数	0.944767	被説明変数の平均		0.003559
自由度修正済み決定係数	0.942060	被説明変数の標準偏差		0.005364
回帰標準誤差	0.001291	赤池情報基準		-10.86976
残差平方和	0.000170	シュワルツ情報基準		-10.62142
対数尤度	596.9671	阪南クイン基準.		-10.76907
ダービンワトソン値	1.943872			
AR特性方程式根逆数	.93-.09i	.93+.09i	-.32	
MA特性方程式根逆数	.36	.29		

表 2.7.3.11　IPD J-REIT ファンド・レベル・リターン指数の GARCH(0,1)モデル

変数	係数	標準誤差	z統計値	確率.
C	0.002531	0.004263	0.593583	0.5528
AR(1)	1.040445	0.027923	37.26093	0.0000
AR(2)	0.224892	0.102274	2.198908	0.0279
AR(3)	-0.301452	0.077009	-3.914495	0.0001
Variance Equation				
C	-7.74E-08	2.70E-08	-2.865711	0.0042
GARCH(-1)	1.009788	0.008249	122.4167	0.0000
決定係数	0.953202	被説明変数の平均		0.003586
自由度修正済み決定係数	0.951852	被説明変数の標準偏差		0.007968
回帰標準誤差	0.001748	赤池情報基準		-10.02228
残差平方和	0.000318	シュワルツ情報基準		-9.873275
対数尤度	547.2033	阪南クイン基準.		-9.961866
ダービンワトソン値	2.350617			
AR特性方程式根逆数	.94	.62	-.52	

IPD 不動産投資指数については GARCH(1,0)が採択される(表 2.7.3.9)。しかしながら，説明変数の残差 2 乗の項の係数の値が有意水準 10%でも有意とはならない。つまり「係数の値＝０」という帰無仮説を棄却できない。自由度調節済みの決定係数(R^2 値)も 0.3 と小さい。要するにうまく GARCH モデルが当てはまらない。このことは，ARIMA モデルが予測確定的に変化をなぞった後の残差については，ボラティリティの変動が不均一ではなく均一であることを示唆するものであろう。

IPD J-REIT 不動産投資指数については GARCH(1,2)が採択される(表 2.7.3.10)。しかし 3 つの説明変数のすべてにおいて係数の値が有意ではない。ここから示唆されることも上と同じく，分析期間を通じてボラティリティは不均一ではなく均一ということであろう。なお，より正確には「すべての係数＝０」という帰無仮説を検定すればよい。

IPD J-REIT ファンド・レベル・リターン指数については GARCH(0,1)が採択される(表 2.7.3.11)。ここでは，説明変数のラグ付ボラティリティの係数が有意に効いていることが読み取れる。つまり，ボラティリティの変動は不均一であることになる。

2.8　本章のまとめ

本章では，モデル構築の前に，Cheng らが，不動産の非流動性の一つとして定義する Non-i.i.d.過程について詳しく議論してきた。Cheng らは，Non-i.i.d.過程により，不動産の投資分散が長期保有と供に増幅され長期保有を妨げるとして，彼らのモデル内で支配的な役割を与えていた。そこでその正当性について日本データを持って試験してみることにした。

Cheng らの指摘する Non-i.i.d.過程，いわゆる「リターンの分散が保有期間の 2 乗で増大する傾向」を試験した。その結果，彼らは記述的な分散をもって Non-i.i.d.過程をファクトファインディングとして Non-i.i.d.過程を定義したに過ぎないことが示唆された。さらに同特性の背後に単位根過程またはそれに似た分布であると指摘した。日本においては，単位根が確認することができた。

投資家は予測を行いながらポートフォリオ運用を行っており，予測誤差こそが彼らにとってのリスクである。そこで ARIMA によるモデル化を実施した。その結果，決定係数が低く予測誤差が大きい結果となった。この予測誤差は保有期間の 3 乗で増大することを意味する。リターンの予測分散が保有期間の 2 乗で増幅することと同意義であり，Cheng らの指摘と同じである。

しかし，これは不動産単体をもって分析をしたものであるが，複数資産クラスの枠組みで分析を行った場合はどうだろうか。つまり，ポートフォリオの一部として不動産を扱った場合，問題となっている誤差を減らせるのではないだろうか。投資家は複数の資産クラスを組み合わせることによってポートフォリオを構築しているし，各資産クラス間の相対的関係性によって不動産の投資妙味もかわってくる。これは現代ポートフォリオ理論（MPT）の枠組みとも一致する。

そこで，次章にて多変量時系列分析を扱い，予測誤差の極小化を図ってみたい。投資家は複数の資産クラスのリスク／リターン動向を把握・予測しながらポートフォリオ選択を行っている。ポートフォリオの枠組みで不動産を取り扱い分析することは自然である。

3　ポートフォリオ選択における不動産と他の複数資産の多変量時系列分析

前章で得られたように，単変量分析では大きな予測誤差が見られた。しかし，これはあくまで単変量でみた結果である。これは多変量をもって，より時系列的に分析した場合，予測誤差を小さくすることは可能であろうか。また，不動産の収益指数の時系列的特性を理解するには複数資産の枠組みで分析する必要がある。本章では，この多変量時系列分析をもって Non-i.i.d.過程を解明していく。

3.1　先行研究の整理

各資産間の相互関係性はポートフォリオ管理において大きな意味を持つ。Markowitz (1952)の平均・分散モデルは，異なるリターン変動をもつ資産同士を組み合わせてポートフォリオ構築することによりリスクの分散を図るものであるが，資産間の相対的関係性が時間により変化するのであればその関係性の過去の推移を見直し将来の予測をすることでポートフォリオの資産配分比も能動的な見直しが必要となってくる。

既往研究では上場不動産であるREITと不動産とが他資産に有する関係性の時間変動を見るものが多い。REIT(不動産投資信託)もまた不動産に関連した資産クラスである。その高い市場公開性と賃料ベースの収入から，流動性と分割可能性のより高い不動産の投資方法として広く認識されている。Giliberto (1990)[1]は不動産とREITに共通する純不動産因子について報告している。また，Oikarinen *et al.*(2012)[2]はREITが不動産より先行して推移することを報告している。1994年から2010年のセクター別REITのデータを分析した結果，不動産セクターを考慮してもなおREITが直接不動産をリターンにおいて先行するという結果が得られた。またREIT市場で示された価格変動は不動産の価格に鈍く吸収されていくことを報告した。つまり，REITの特性を理解することも不動産を理解することの一部として有用であると考えられる。Clascock *et al.* (2000)[3]と Clayton & MacKinnon (2001)[4] はREITを含んだ不動産と他の資産クラスとの関係性を時系列分析し，構造変化と時間的変動性を報告した。

日本市場における REIT と不動産を含む他資産との関係の経年変化性は価格に関して行われたもの(Chiang, So, & Tan, 2008)[5]があるが，総合的な収益（トータル・リターン）の議論にまでは進んでいなかった。

---

[1] Giliberto, S. M. (1990), Equity Real Estate Investment Trusts and Real Estate Returns, The Journal of Real Estate Research: 259-263

[2] Oikarinen, E., Hoesli, M., Serrano, M. (2012), Do Public Real Estate Returns Really Lead Private Returns?, Swiss Finance Institute Research Paper, No. 10-47

[3] Clascock, J. L., Lu, C., & So, R. W. (2000), Further Evidence on the Integration of REIT, Bond, and Stock Returns. Journal of Real Estate Finance and Economics, 20:2: 177- 194

[4] Clayton, J., & MacKinnon, G. (2001), The Time-Varying Nature of the Link between REIT, Real Estate and Financial Asset Returns, Jornal of Real Estate Potfolio Management, Vol. 7 (No. 1): 43-54.

[5] Chiang, Y., So, C., & Tang, B. (2008), Time- varying performance of four Asia-Pacific REIT, Journal of Property Investment & Finance, 26 (3): 210-231.

前章では，不動産指数が定常性を得るためには他資産よりも多い階差を必要とし，同指数をARIMA モデル化しても決定係数が低く説明力として不十分であることが示唆された。つまり，単変量ではなく，多変量の枠組みをもって取り組むべきであるということであり，これは資産間の相互関係性を重視する MPT（Modern Portfolio Theory）の考え方とも一致する。

3.2　研究データと分析方法

3.2.1　研究データとその性質

研究対象とした資産クラスは，株式，債券，J-REITそして不動産である。株式指数は規模に応じ細分し，㈱東京証券取引所の東証一部大型・東証一部中型・東証一部小型を用いる。債券は，国債と事業債を区別する。国債・事業債には㈱大和総研のダイワ・ボンド・インデックス国債（7年以上）・事業債（7年以上）を用いる。不動産にはMSCI Inc.のIPD不動産投資指数を採用した。また株式上場した不動産ファンドであるJ-REIT(日本不動産投資信託)を加え，㈱三井住友トラスト基礎研究所のSMTRI J-REIT総合インデックスを採用した。採用したものはすべて配当込もしくは総合収益を表す指数であり，本論文でリターンと言う場合，特段に言い換える場合を除き，この総合収益を指す。用いる指数の観測期間は，2001年12月から2012年12月である。各資産指数の記述統計を見ると，標準偏差は高いものからJ-REIT，小規模株式，中規模株式，国債，大規模株式，事業債，不動産という順であった。上記すべての指数は総合収益指数であるのでその対数階差をとったものは総合収益（トータル・リターン）となる。

3.2.2　共和分関係の検定

前章において，ここまで全指数のレベルデータにおいておおよそ単位根過程（非定常性）が認められている。そこで次に指数データ間に共和分関係があるかどうかを検定することにする。検定方法には Johansen の共和分検定を用いる。この方法では検定結果を見るのにトレース・テストと最大固有値テストとがあることが知られている。そのうち「歪みと尖度をもつ誤差分布に対しても頑健性がある」（蓑谷(2007,p.710)[6]，Cheung and Lai(1993)[7]）といわれるトレース検定の結果をここでは優先させることとした。

7 つの指数データの間の共和分検定の結果を表 3.2.2.1 に示す。左端列が共和分の個数の帰無仮説である。その右の表の中は帰無仮説を棄却する有意水準を表す。以下ラグ次数によって異なりはするが共和分関係が見て取れる。ラグ次数 1 とラグ次数 2 の場合は 2 つの共和分関係が観測される。ラグ次数 3 とラグ次数 4 の場合は 4 つの共和分関係が観測される。いずれにしても共和分関係が存在することが確認された。

[6] 蓑谷千鳳彦(2007)，計量経済学大全，東洋経済新報社: 709-710

[7] Cheung, Y. and Lai, K. (1993), Finite sample sizes of Johansen's likelihood ratio tests for cointegration, Oxford Bulletin of Economics and Statistics, 55: 313-328

表 3.2.2.1　Johansen の共和分検定におけるトレース検定結果

	1 次ラグ	2 次ラグ	3 次ラグ	4 次ラグ
None	***	***	***	***
At most 1	***	***	***	***
At most 2	*	*	***	***
At most 3	-	-	**	**
At most 4	-	-	-	-
At most 5	-	-	-	-
At most 6	-	-	-	-

(注)　***1%水準で棄却　　**5%水準で棄却　　*10%水準で棄却。
5%水準を棄却域の限度とし，それを超えるとき対立仮説「H_1："At most N"より多い」を採択する。

3.2.3　モデルの決定：ベクトル誤差修正モデル

観測データの一部である不動産投資指数には非定常性が見られ，なおかつ変数間では共和分関係があることがわかっている。いまもとの指数レベルの変数ベクトルを$\boldsymbol{y}_t$とする。これらはすべて単位根過程にしたがうとともに共和分の関係にある。この VAR 表現をもつ共和分システムは，Granger 表現定理によりベクトル誤差修正モデル（VECM）で表現することができる。

ここでわれわれが分析対象として仮定する VECM モデルは，もとのデータ系列$\boldsymbol{y}_t$には定数項あり，トレンド項なし，また共和分関係には定数項あり，トレンド項なし，というもので次の式で表す。トレンド項なしと仮定するのは，レベルデータとしての指数の間に時間とともに動きが乖離していく関係があるとは考え難いからである。

$$\Delta \boldsymbol{y}_t = \mathbf{c}_0 + \boldsymbol{\Gamma}_1 \Delta \boldsymbol{y}_{t-1} + \boldsymbol{\Gamma}_2 \Delta \boldsymbol{y}_{t-2} + \cdots + \boldsymbol{\Gamma}_p \Delta \boldsymbol{y}_{t-p} + B(A' \boldsymbol{y}_{t-1} - \mathbf{c}_1) + \boldsymbol{\epsilon}_t \qquad (3.2.3.1)$$

$\Delta \boldsymbol{y}_t$：階差ベクトル(t期)
$\boldsymbol{\Gamma}_p$：係数行列
A：共和分ベクトルの行列
B：係数行列
$\mathbf{c}_0$：定数項ベクトル（もとのデータについて）
$\mathbf{c}_1$：定数項ベクトル（共和分関係について）
$\boldsymbol{\epsilon}_t$：かく乱項

表 3.2.3.1 は VECM における 7 本の方程式の推定結果のうち不動産の方程式についてだけパフォーマンスを表したものである。情報量基準（Schwarz Criterion, SC）の最も低いものは 1 次数モデルである。しかし，一般的に流動性の低い不動産に対して，株式・債券・J-REIT は流動性が不動産よりも高く，それらの動向も不動産よりも先行して動くことが実務において知られている。また不動産に関する公表資料はおおよそ 1 四半期以上の遅れがあることも知られている。例えば，J-REIT はその公表資料に関する高い透明性を有しているが，それでも不動産鑑定評価額や収支の情報を公表するまでに，決算時点から起算して 3 カ月ほどの期間を有する。そこでこの実態により即した分析結果を期待すべく，1 四半期に相当するラグ次数 3 のモデルを

採用することとした。

ここで不動産の VECM における特性が見て取れる。まず表 3.2.3.1 の全てのモデルを見ても決定係数が 0.99 以上ととても高いことがわかる。決定係数はモデルの当てはまりを表すものであるが，1 に限りなく近い場合は変数の時系列変動に何らかの問題ある場合が多い。そこで VECM モデルの係数を見ると，不動産の方程式において不動産(-1)の項の係数が 1.0 に近い係数となっており，これが原因となり高い決定係数を導き出したと考えられる。さらに AR 多項式の特性根の逆数 (単位円の中にあれば定常)を見たところ，やはり単位円の上にほぼ重なる点を見ることができた。前述の単位根検定から，不動産を除く資産は 1 階差で定常性が得られるのに対し，不動産は 2 階差を要することも指摘されている。つまり，単位根過程の影響が VECM 推計の際に影響を及ぼしていると考えられる。

しかし，本分析において適用した VECM においてこの影響は問題ではないと考える。通常，単位根過程の残る変数の間で最小二乗法を適用した場合，見せかけの回帰となる。しかし，変数間に共和分関係が認められる場合，推定量は真の値へ早く収束し超一致的となるため，変数の単位根過程は問題とはならない。前節においても変数間の共和分関係が報告されていることから，決定係数が著しく高く出力されてしまうものの，分析への影響は低いとみて継続して進めることとする。

表 3.2.3.1　VECM の結果（不動産の方程式について）

	1 ラグ	2 ラグ	3 ラグ	4 ラグ
R-squared	0.99022	0.99153	0.99330	0.99353
Adj. R-squared	0.98958	0.99042	0.99175	0.99144
Sum sq. resids	0.00003	0.00003	0.00002	0.00002
S.E. equation	0.00050	0.00048	0.00045	0.00046
F-statistic	1543.58	889.93	642.01	475.40
Log likelihood	815.28	818.07	826.42	821.82
Akaike AIC	-12.31	-12.34	-12.43	-12.34
Schwarz SC	-12.11	-11.99	-11.87	-11.63
Mean dependent	0.00390	0.00388	0.00386	0.00385
S.D. dependent	0.00487	0.00488	0.00490	0.00492

なお，VECM モデルの 7 本の方程式すべてについて情報量規準をまとめたのが表 3.2.3.2 である。これを見ると AIC ではラグ次数 2 が支持され，SC ではラグ次数 1 が支持される。いずれにしてもラグ次数をいくつにするかは，情報量規準で見る限り差異は微妙であり確定的なものとしては決めかねる。よって上で述べたようにデータの性格から 3 か月ラグを見るのがよいであろう。すなわちここで採択した VECM モデルは下記のものである。

$$\Delta \boldsymbol{y}_t = \mathbf{c}_0 + \boldsymbol{\Gamma}_1 \Delta \boldsymbol{y}_{t-1} + \boldsymbol{\Gamma}_2 \Delta \boldsymbol{y}_{t-2} + \boldsymbol{\Gamma}_3 \Delta \boldsymbol{y}_{t-3} + B(A' \boldsymbol{y}_{t-1} - \mathbf{c}_1) + \boldsymbol{\epsilon}_t \qquad (3.2.3.2)$$

表 3.2.3.2　VECM の結果（7 本の方程式すべてについて）

	1 ラグ	2 ラグ	3 ラグ	4 ラグ
Akaike AIC	-44.845	-44.856	-44.589	-44.355
Schwarz SC	-43.111	-42.032	-40.000	-38.651

3.3　分析結果

3.3.1　グレンジャーの因果性

Granger (1969)は理論に基づかない因果性（グレンジャー因果性）を提案した。同因果性の概念を用い，変数間の因果関係を調べる。

まず 7 つの指数全ての間でのペアワイズでのグレンジャー因果性を見てみたい。これは，単純に 2 変数からなる VAR モデルによってグレンジャー因果性を検定することにあたる。全ての指数について 1 対 1 のペアを作りグレンジャー因果性を調べた。その結果，①J-REIT・大規模株式・中規模株式・小規模株式の 4 つが，不動産にグレンジャーの意味での因果性を持つことがわかった。②その他の組み合わせにおいては，グレンジャー因果性を見ることはできなかった。つまり，株式市場に位置する資産が不動産にグレンジャーの意味での因果性を有していることがわかり，その他の債券（事業用債・国債）は同因果性を有していないという結果になった。

次に，全指数を含んだ VECM におけるグレンジャー因果性を検定する。上のペアワイズの検定方法だと，あたかもペアとして取り上げた 2 変数だけで完結した因果性を検定することになる。つまり，第 3 変数を介して相互に影響するかもしれない点は無視することになる。それに対してここでは全ての変数を互いに個々の資産の説明変数とすることにより，より複数資産の枠組みでの分析が可能となる。結果を表 3.3.1.1 に示す。

検定の結果，不動産を被説明変数とした場合，全ての説明変数（他の 6 つの資産）は「個別には」グレンジャーの意味での因果性を持たないことがわかった。この検定は，ある 1 つの説明変数について他の説明変数が存在する条件の下でなおも当該説明変数を追加するだけの意義があるかどうかを統計的に検定するものである。よって，結果は他の説明変数が存在する以上個々の変数を「さらに」説明変数として追加する意義はないというものである。

さてこの結果は前述のペアでおこなった検定とは異なる結果である。つまり，J-REIT・大規模株式・中規模株式・小規模株式の 4 つそれぞれが個別に不動産に影響を与えているものの，複数資産での枠組みとなるとそれらの影響を見ることはできない結果となった。

ところが一方，6 つの説明変数全てについて回帰係数が同時にゼロであるという帰無仮説を検定すると，5%水準で仮説は棄却される。つまり回帰係数全てが同時にゼロであるとはいえず，説明変数全体としてみたときグレンジャーの意味での因果性が確認された。

このことは，不動産自身のラグ変数だけで不動産を説明するような自己回帰モデルでは不十分で，他の資産のラグ変数を説明変数に入れることは意味があるということを表している。つまり，やはり他の資産は総体的に不動産に影響を与えていたことがわかる。

最後に，その他の資産を被説明変数とした場合，不動産は事業債・国債・大規模株式・小規模株式に影響を及ぼしていたことがわかった。つまり，不動産それ自体も他の資産へ影響を及ぼしており，それらは相互に関係しているということになる。

表 3.3.1.1 変数間のグレンジャー因果性検定結果

		説明変数						
		不動産	事業用債券	国債	J-REIT	大規模株式	中規模株式	小規模株式
被説明変数（全体でのグレンジャー因果性）	不動産 (**)	N/A	-	-	-	-	-	-
	事業債 (**)	***	N/A	-	-	-	-	-
	国債 (**)	***	-	N/A	-	-	-	-
	J-REIT (-)	-	*	**	N/A	-	-	-
	大規模株式 (-)	**	-	-	-	N/A	-	-
	中規模株式 (-)	*	-	-	-	-	N/A	-
	小規模株式 (-)	**	-	-	-	-	-	N/A

(注)　***1%水準で棄却　　**5%水準で棄却　　*10%水準で棄却　- 棄却されず。
左端列の( )内の有意水準の表記は「すべての説明変数の回帰係数がゼロ」という帰無仮説に対するもの。

3.3.2 インパルス応答解析

(1) 直交化インパルス法

前節では各資産の与える影響をグレンジャーの意味での因果性としてとらえたが，本節では各資産の影響度を計量的にとらえることにする。手法は，コレスキー分解により直交化したインパルス応答関数にて分析を行う。

直交化インパルス応答関数は説明変数の順序が重要となるが，本分析では「J-REIT・小規模株式・中規模株式・大型株式・国債・事業債」の順番とした。本分析はあくまで資産間の影響度を計量的に分析することを目的とするため，グレンジャー因果性の結果を優先して変数の順番を決定した。前節のグレンジャー因果性分析では全ての変数においては因果性が認められなかったものの，ペア分析の際に不動産に対してグレンジャー因果性があるとわかった変数は，因果性の F 統計量の高いものから順に「J-REIT・小規模株式・中規模株式・大型株式」であった。これは，株式市場の動きが景気判断（センチメントと期待度を含む）の指標となっているため，より動的な影響を不動産に与えていることが予想できる。また J-REIT は上場不動産ともとれるため，不動産に最も影響を与える資産であるという予想に疑義は少なく，実際にもグレンジャー因果性における F 統計量も最も高い。残る変数である事業債と国債は，ペアワイズ分析と VECM モデルの他資産の回帰係数の検定との両方においてグレンジャー因果性はないと判断されたが，本分析では株式変数に次いで「国債・債券」という並びにした。その理由は，国債のイールドと不動産のキャップレートを比較しその差（イールド・スプレッド）を不動産のリスクプレミアムとして議論することも少なくないためであり（例えば，清水, 2012），その影響を無視することはできない。事業債は不動産と同様に流動性の低い資産であるとともに，株式と国債の中間として一般的に認識される資産であるが，不動産対国債ほどの議論をされることはあまりない。そこで国債は債券よりも不動産に対して大きい影響を及ぼすと判断した。

(2)　直交化インパルス応答分析の結果

分析結果を図 3.3.2.1～図 3.3.2.4 にあげた。図はすべて横軸が 1 期から 24 期までの時間軸，縦軸がインパルスに対する応答を計量化したものである。図 3.3.2.1 は，インパルス発生側と応答側とをペアにして 1 つずつグラフ化したものである。発生側が横方向に，J-REIT，小規模株式，中規模株式，大規模株式，国債，事業債，不動産の順に並べてある。また応答側は縦方向に同じ順序に並べてある。図 3.3.2.2 は，1 つの応答ごとにグラフ化したもので，発生側の 7 つの資産をひとまとめに掲載したものである。そのうち，不動産の応答と J-REIT の応答を取り挙げたものが図 3.3.2.3 と図 3.3.2.4 である。

まず気づくのは，ほぼ全般的に応答が減衰しないで発散していることである。これらの図は決してインパルスの応答を累積したものではなく，あくまでも 1 回のインパルスに対する応答が時系列的にどのように推移するかをみたものである。それが減衰しないで発散するということは，それぞれの影響は一時的なものではなく長期にわたり持続することを表す。以下読み取れる点を見ていく。

不動産の応答に着目すると（図 3.3.2.3），まず不動産自身のインパルスに影響を受けている点が挙げられる。ただその影響は減衰しないものの時間の経過とともに頭打ちになる。一方，代わって，J-REIT，大規模株式，中規模株式の影響として現れてくる。これらは減衰しないで発散する傾向にある。小規模株式の影響はこれらより後れて出てくる。国債と事業債の影響はこれらから比べると小さいことがわかる。

J-REIT の応答に着目すると（図 3.3.2.4），J-REIT 自身のインパルスの影響が大きくずっとそれが持続している。不動産の影響が比較的早く現れるがやがて減衰する。一方，大規模株式の影響は比較的早く現れて消えないで持続している。中規模株式の影響もやや小さくなるが残り続ける。

3.3.3　予測誤差の分散分解

1 つの資産の応答（変動）に，他の個々の資産のインパルスがどの程度寄与しているかをより明確に表すのが予測誤差の分散分解である。ここでは同じく直交化インパルス法をもとにした分散分解の結果を見ることにする。

結果を図 3.3.3.1～図 3.3.3.4 にあげた。図はすべて横軸が 1 期から 24 期までの時間軸，縦軸はインパルス発生側がもたらした影響の度合い（寄与率）である。0～100%のスケールである。図 3.3.3.1 は，インパルス発生側と応答側とをペアにして 1 つずつグラフ化したものである。発生側が横方向に，J-REIT，小規模株式，中規模株式，大規模株式，国債，事業債，不動産の順に並べてある。また応答側は縦方向に同じ順序に並べてある。図 3.3.3.2 は，1 つの応答ごとにグラフ化したもので，発生側の 7 つの資産をひとまとめに掲載したものである。そのうち，不動産の応答と J-REIT の応答を取り挙げたものが図 3.3.3.3 と図 3.3.3.4 である。

まず不動産への影響に着目すると（図 3.3.3.3），初期のうちは不動産自身が影響をもたらしている。しかし早いうちに J-REIT の影響が現れてきてその影響は継続する。大きさも無視できない（約 40%）。またそれに遅れて大規模株式と中規模株式とが影響として現れてくる。これらは減衰しないで継続し約 20%の影響をもたらす。国債は初期に影響が現れるが数%の影響の後減衰する。

ここからわかるように，不動産の総合収益に影響をもたらす先行する資産の動きとして J-REIT, 大規模株式，および中規模株式を挙げることができる。図 3.3.3.3 から読み取ると，先行する J-REIT の変動の影響は数ヶ月後に不動産に現れる。また株式の変動の影響はほぼ 1 年後に不動産に現れる。既存研究が指摘するように，J-REIT が先行するという事実がわが国の資産市場でも読み取ることができる。また，ここだけから観察されることは，株式 →J-REIT→ 不動産という影響の波及である。

一方，J-REIT への影響に着目すると（図 3.3.3.4），J-REIT 自身の影響が大きいが長期にはその寄与率は減衰する。一方，半年を経過した後，次第に大規模株式の影響が現れてきてそれは継続し約 20%の寄与率を持つようになる。中規模株式の影響はもっと遅く現れ数%の寄与率を占める。一方，逆に株式への J-REIT からの影響という点では，図 3.3.3.1 に見るように早いうちに J-REIT は株式に大きな影響をもたらしている。よって，上で述べたような，株式 → J-REIT という影響の波及よりは逆に，J-REIT → 株式という波及である。

「株式 →J-REIT→ 不動産」と見るか「J-REIT →株式 → 不動産」と見るかはなお議論の余地がある。グレンジャーの因果性でも明確にとらえられなかった点である。しかしいずれにしても，「J-REIT・株式 → 不動産」という関係は確認されたといえよう。

3.3.4 考察

不動産の Non-i.i.d.過程については多変量での時系列解析の余地を残していた。そこで，複数資産の枠組みにて不動産リターンを分析し，その予測誤差の説明力を高めることに努めた。

本研究はおもに 3 つの発見を報告した。①まず，様々な代替資産が不動産に相対的に影響を与えていたということである。つまり，不動産を複数資産の枠組みで分析することは正しい。②次に Oikarinen *et al.* (2012)が指摘するような，J-REIT と株式（日本においては大規模・中規模）が不動産を先行するという結果が我が国においても確認された。これは現在の J-REIT と株式から，将来における不動産の総合収益の予想可能性を示唆している。特に J-REIT は約 40%もの不動産の予測誤差を引き起こすことがわかったことから，不動産にとって J-REIT のさらなる分析解明が重要であるといえる。③最後に，予想誤差の分散分解において J-REIT 自身も株式に対して影響を与えていることがわかったが，J-REIT には大規模株式が他の株式に比べ大きく寄与していることも見えた。また大規模株式は不動産に対しても影響を与えていたことが確認できたため，大規模株式特有のイベントや動向が，直接不動産と上場不動産である J-REIT の両方にとって大きな影響を持つといえよう。

本章の業績として一つあげたいのが，株式と REIT が不動産に対する先行性の存在を，日本においても確認した点である。これは，ポートフォリオ構築においても重要な示唆を与える。当該研究において対象とした資産クラスで構成されたポートフォリオを想定した場合，大規模株式と J-REIT が不動産に与える影響は大きい。これは一定のリスクを共有していることと同じであり，ポートフォリオ運用者は，その投資プロセスにおいて理解しておく必要があり，フォワード・ルッキング（先を見据えた）なポートフォリオ運用においては重要である。

このことからも，ポートフォリオ分析において，投資家の先見的かつ動学的な運用を導入することの重要性は明らかである。投資家は絶えず先を見越しながらポートフォリオ運用を行っ

ており，この多段階な意思決定を反映させる必要があるだろう。

最後に本研究から見えた不動産の Non-i.i.d.過程について今一度思い起こしたい。推定した VECM であるが，不動産の式において不動産(-1)に 1.0 に近い係数が残り，単位根がうまく消滅せずに残っているモデルとなった。これは不動産の時系列特性に引きずられて発生したものであり，モデル全体に影響を及ぼしている。このことからも，不動産の Non-i.i.d.過程をポートフォリオ分析において考慮する必要性が再確認できたともいえよう。

3.4　本章のまとめ

さて，第２章から Cheng *et al.*(2013)が指摘する不動産の Non-i.i.d.特性について詳しく整理・分析を行ってきた。第２章から本章まで得られた知見を整理すると，以下の通りである。

Cheng *et al.*は，同特性を記述統計的なファクトファインディングをもって定義し，彼らのポートフォリオ分析モデル内に，不動産の最適保有期間を導入し支配的な役割を与えた。しかし，第２章で試験を重ねた結果，彼らの指摘する同特性は，単なる単位根である可能性が強いことがわかった。

投資家の立場から考えた場合，ポートフォリオ分析の着眼点は，単なる分散ではなく条件付き分散である。つまり，予測誤差こそが投資家にとって重要な指標となる。そこで不動産指数を ARIMA モデル化したところ，こちらも単位根が残り続ける結果となり，誤差が累積し続ける結果となった。これは Cheng *et al.*が指摘する「分散が保有期間の二乗で増幅」していく現象と同じ結果を時系列的観点から確認したことになる。やはり同特性は問題であるように見受けられた。しかし，これはあくまで不動産のみをもって行った単変量分析の結果であり，単位根を持つ時系列データにおいては，当たり前の結果と言える。

そこで，本章では，複数資産クラスの側面から同分析を多変量へと拡張することとした。投資家のポートフォリオ選択の観点からも，複数資産クラスの側面から不動産を扱うことは，資本市場の実態そして現代ポートフォリオ理論において適切であるといえるためである。

多変量分析の結果，やはりモデル自体に不動産の単位根は残り続けるものの，不動産の予測誤差を他の資産クラスをもって説明できることがわかった。これにより，Cheng *et al.*が考えるほどに Non-i.i.d.特性がポートフォリオ選択に支配的な役割を担っているとは考えづらい。言い換えるならば，不動産のみが暴走をする（単独で，他の資産クラスと全く違う動きをする）という彼らの主張は現段階で受け入れづらく，今後理論的かつ計量的な説明によって結論付けられるべきであると指摘した。

このように，本章では Cheng *et al.*の Non-i.i.d.特性がモデル構築時に意図的に導入した「最適保有期間」について，未だに懐疑的な部分が大きく，今後さらなる理論的計量的な試験が必要であること，つまり，新たな検討課題を見出した。

図 3.3.2.1　インパルス応答解析結果（直交化インパルス法）

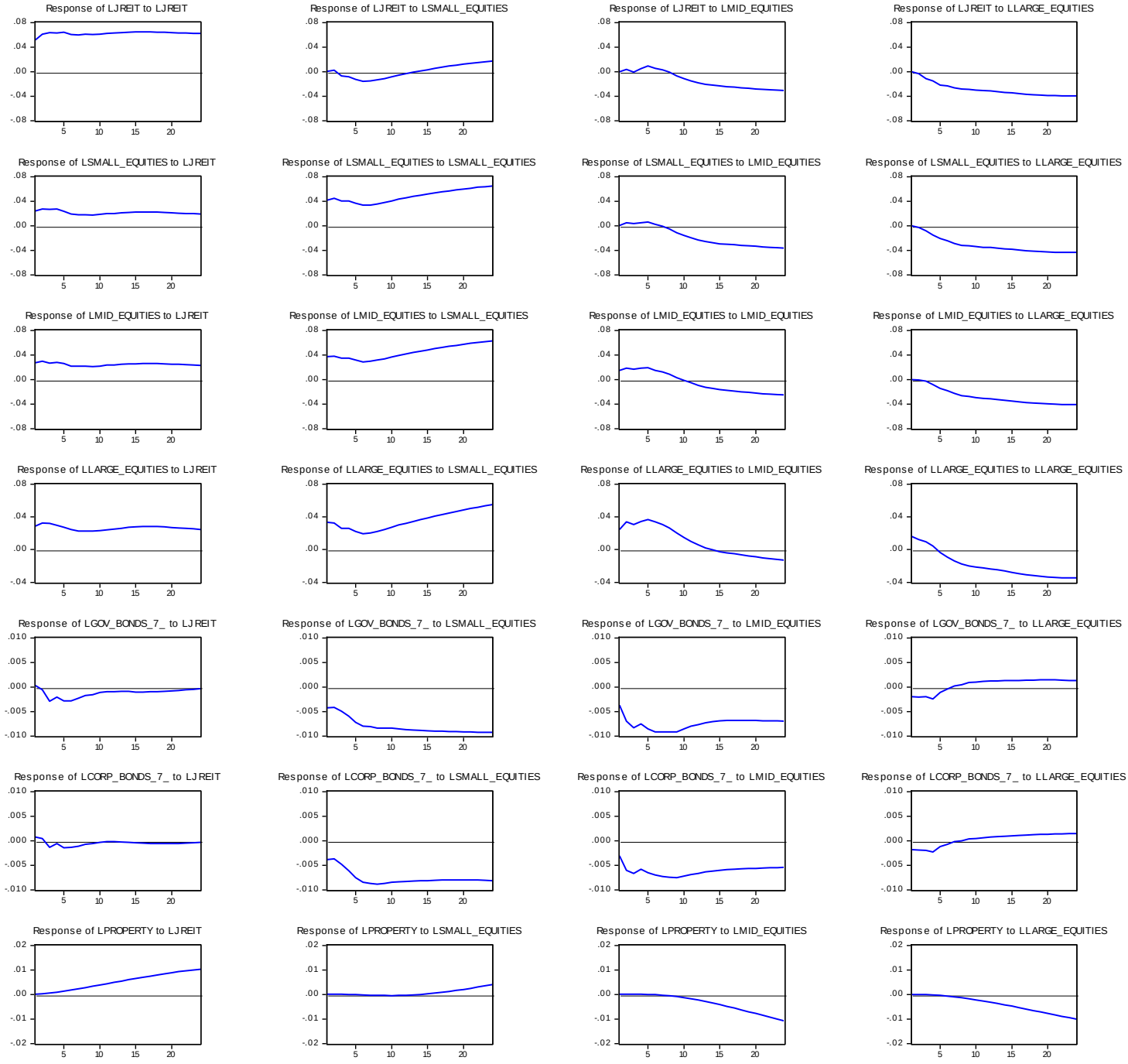


図 3.3.2.1　インパルス応答解析結果（直交化インパルス法）―続き

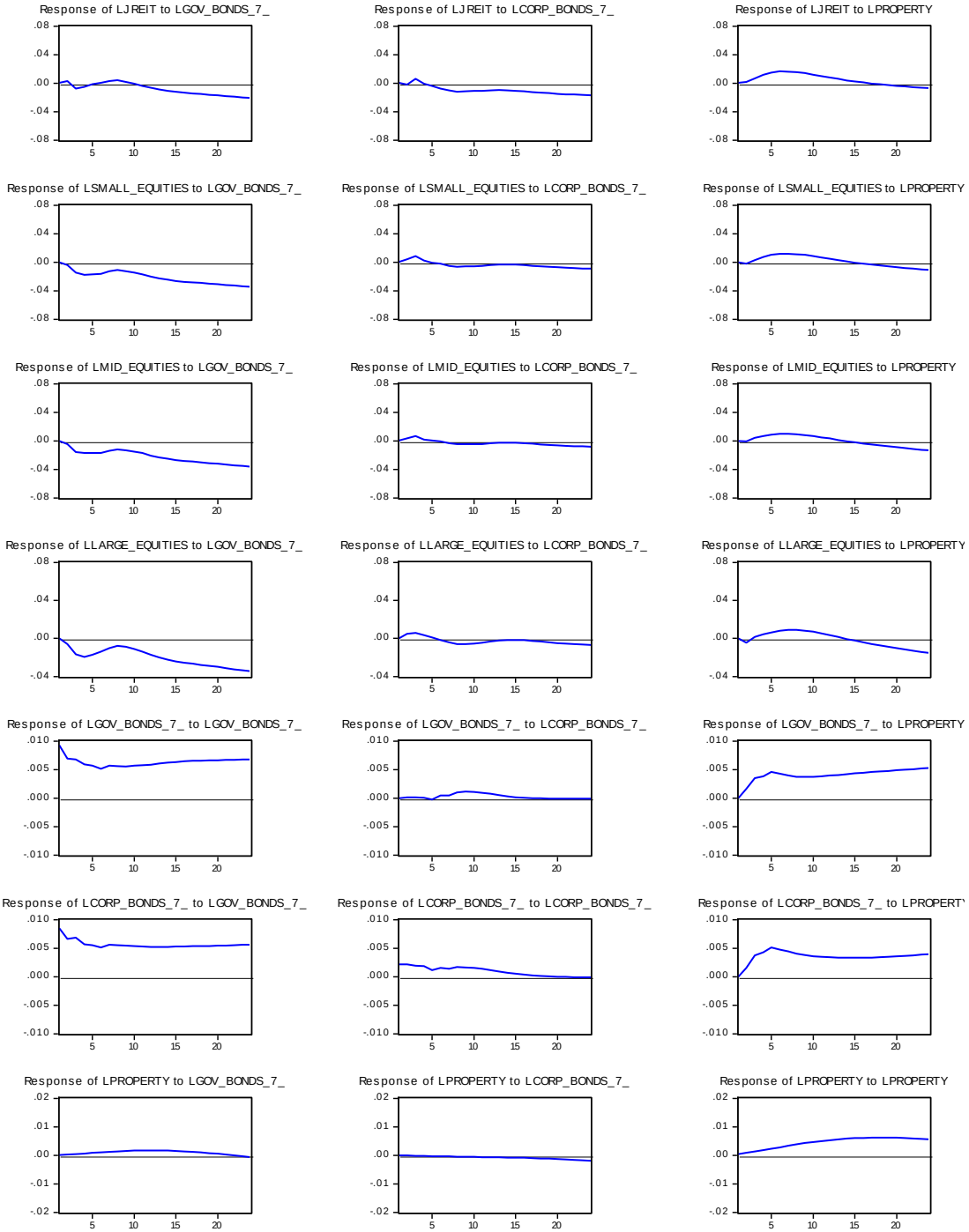


図 3.3.2.2　インパルス応答解析結果（直交化インパルス法）

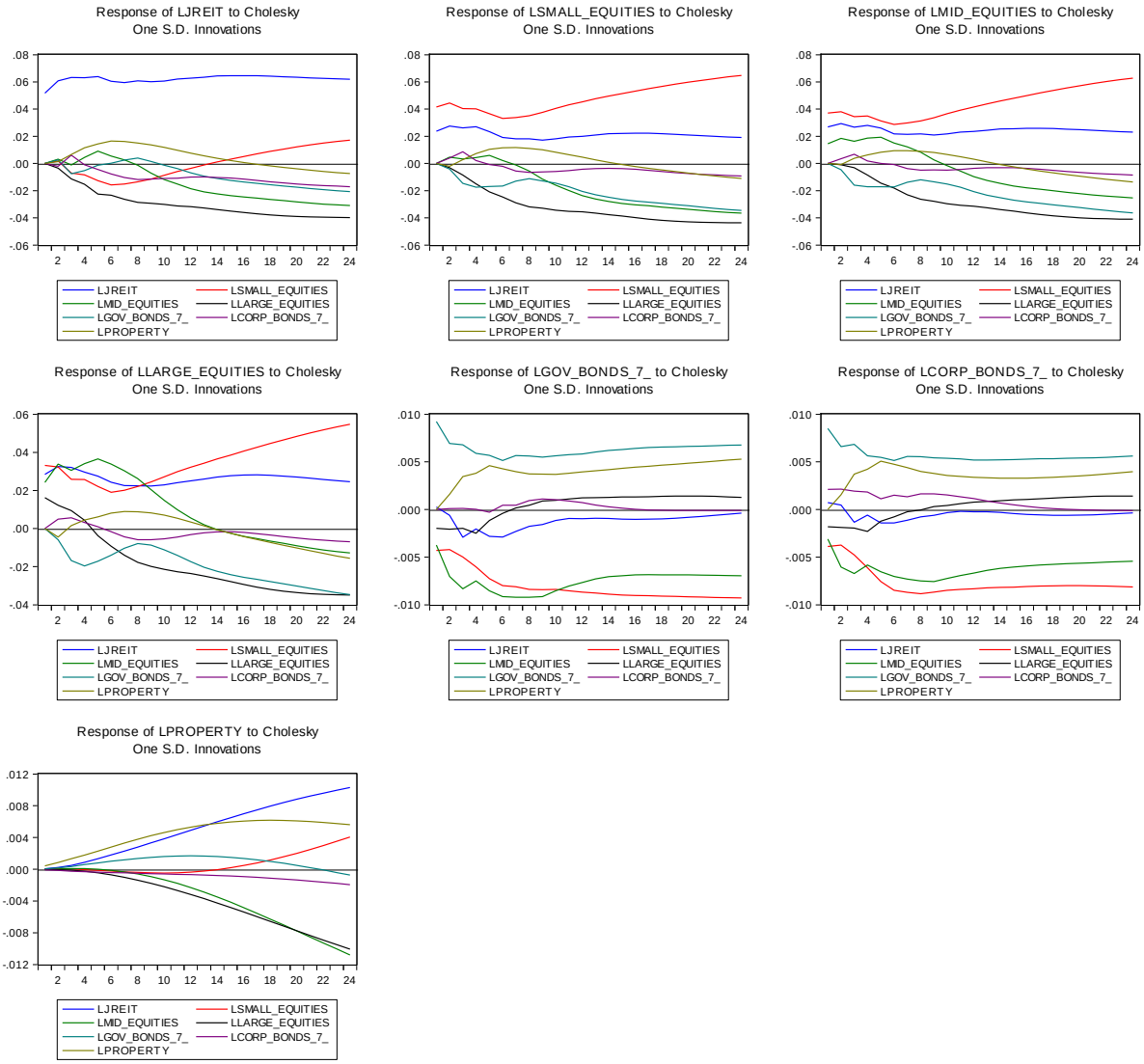


図 3.3.2.2　インパルス応答解析結果（直交化インパルス法）

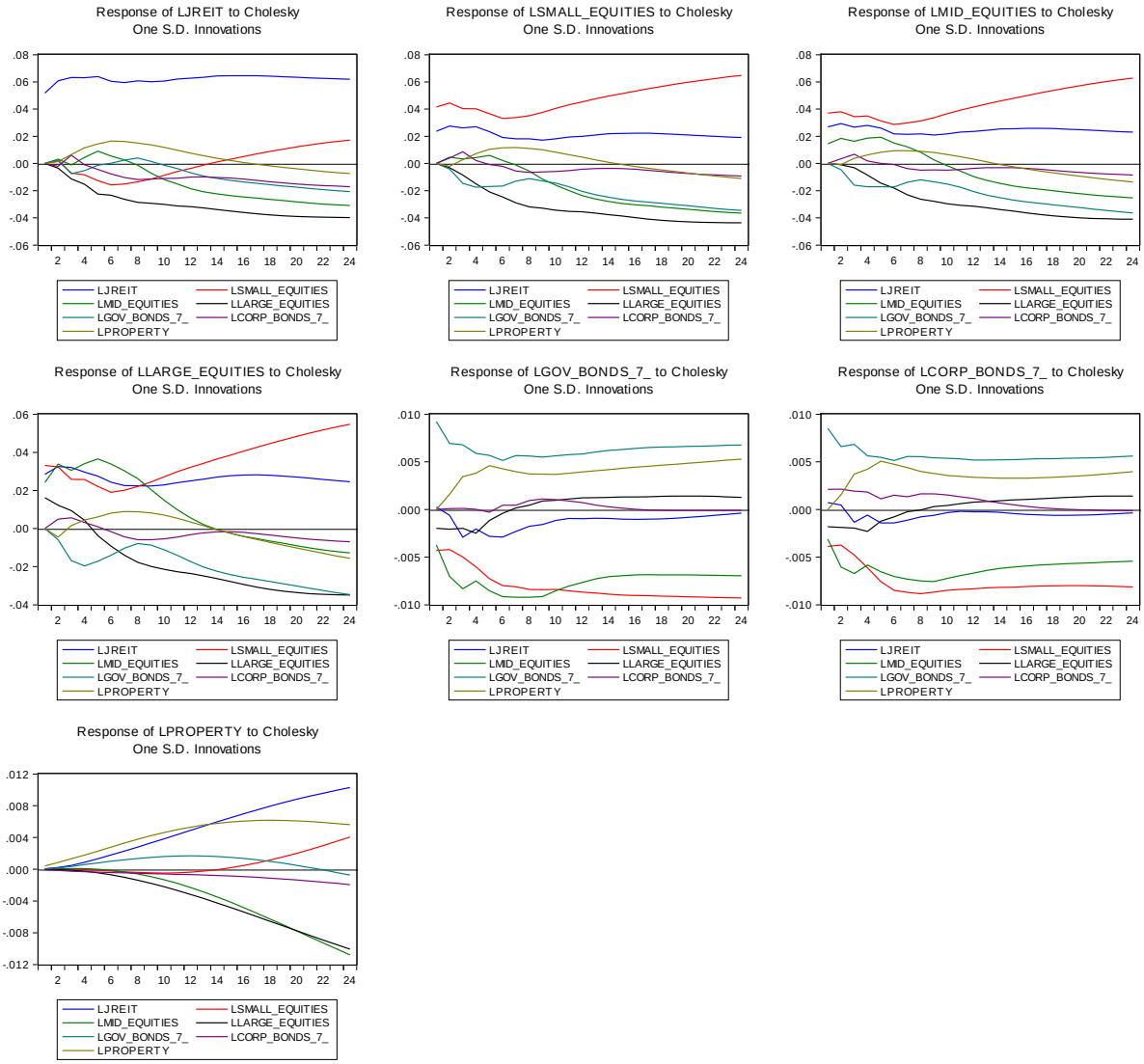


図 3.3.2.3　インパルス応答解析結果（直交化インパルス法，不動産の応答）

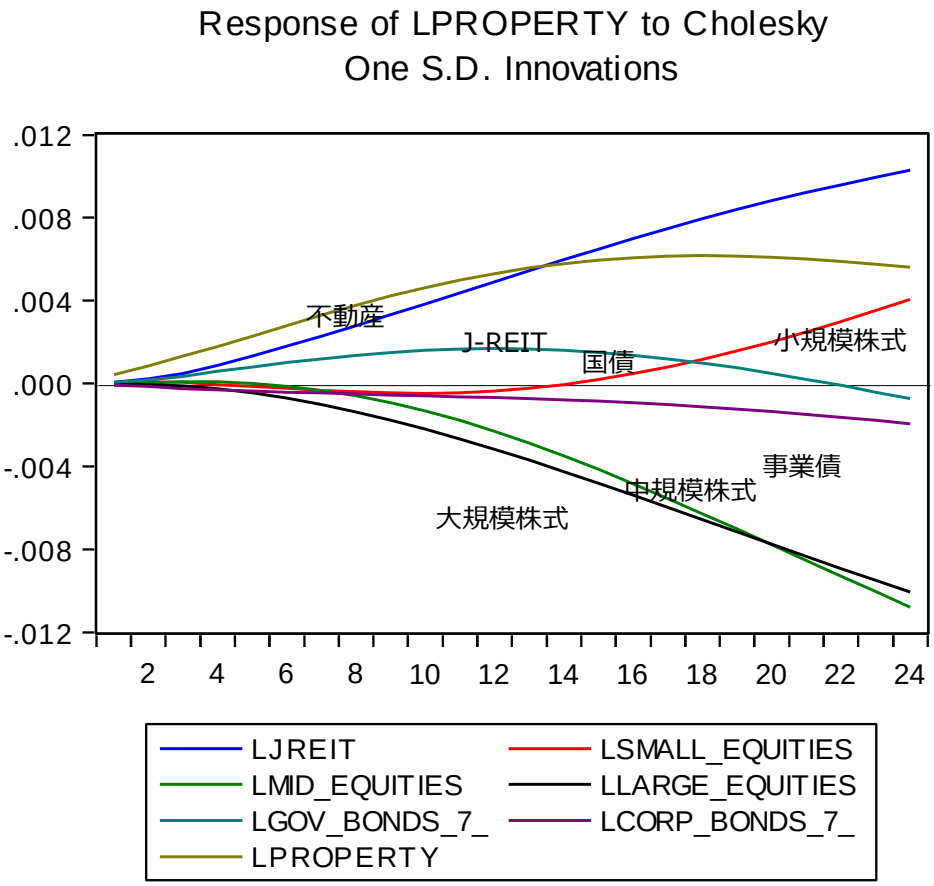


図 3.3.2.4　インパルス応答解析結果（直交化インパルス法，J-REIT の応答）

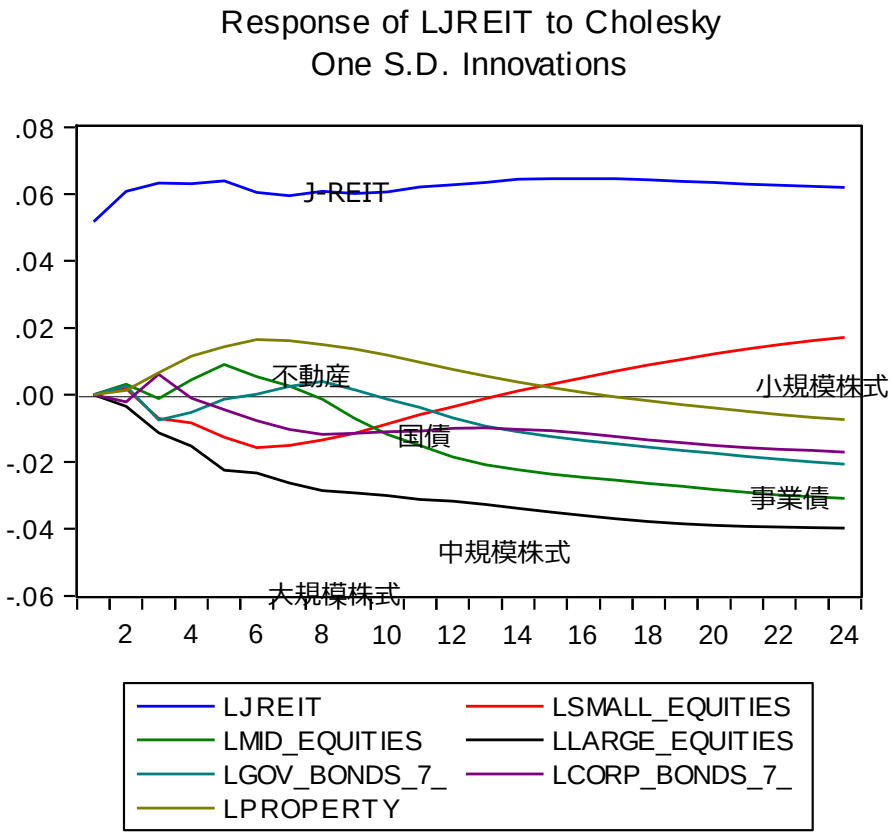


図 3.3.3.1　分散分解

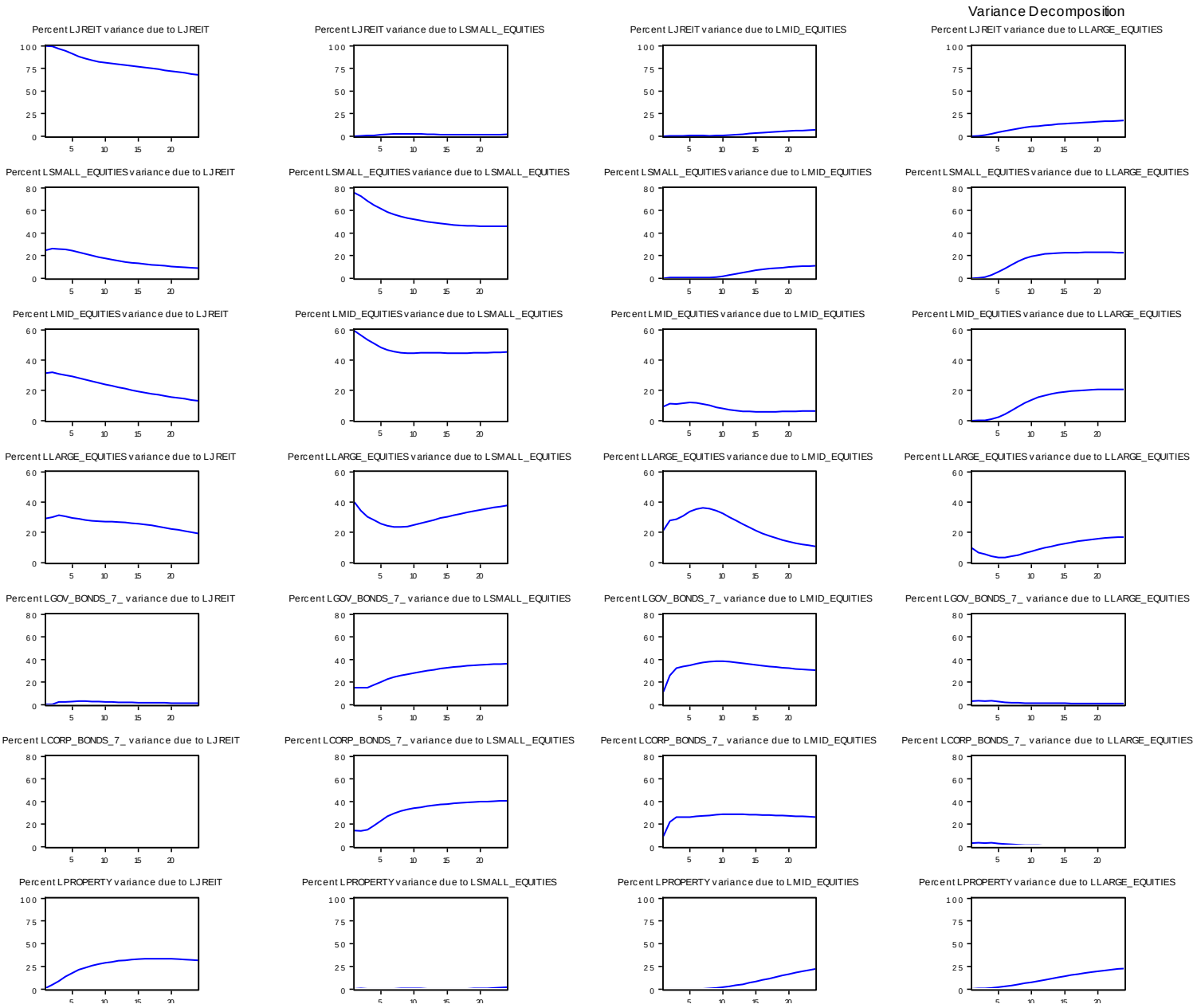

Variance Decomposition
Percent LJREIT variance due to LJREIT
Percent LJREIT variance due to LSMALL_EQUITIES
Percent LJREIT variance due to LMID_EQUITIES
Percent LJREIT variance due to LLARGE_EQUITIES
Percent LSMALL_EQUITIES variance due to LJREIT
Percent LSMALL_EQUITIES variance due to LSMALL_EQUITIES
Percent LSMALL_EQUITIES variance due to LMID_EQUITIES
Percent LSMALL_EQUITIES variance due to LLARGE_EQUITIES
Percent LMID_EQUITIES variance due to LJREIT
Percent LMID_EQUITIES variance due to LSMALL_EQUITIES
Percent LMID_EQUITIES variance due to LMID_EQUITIES
Percent LMID_EQUITIES variance due to LLARGE_EQUITIES
Percent LLARGE_EQUITIES variance due to LJREIT
Percent LLARGE_EQUITIES variance due to LSMALL_EQUITIES
Percent LLARGE_EQUITIES variance due to LMID_EQUITIES
Percent LLARGE_EQUITIES variance due to LLARGE_EQUITIES
Percent LGOV_BONDS_7_ variance due to LJREIT
Percent LGOV_BONDS_7_ variance due to LSMALL_EQUITIES
Percent LGOV_BONDS_7_ variance due to LMID_EQUITIES
Percent LGOV_BONDS_7_ variance due to LLARGE_EQUITIES
Percent LCORP_BONDS_7_ variance due to LJREIT
Percent LCORP_BONDS_7_ variance due to LSMALL_EQUITIES
Percent LCORP_BONDS_7_ variance due to LMID_EQUITIES
Percent LCORP_BONDS_7_ variance due to LLARGE_EQUITIES
Percent LPROPERTY variance due to LJREIT
Percent LPROPERTY variance due to LSMALL_EQUITIES
Percent LPROPERTY variance due to LMID_EQUITIES
Percent LPROPERTY variance due to LLARGE_EQUITIES

図 3.3.3.1　分散分解―続き

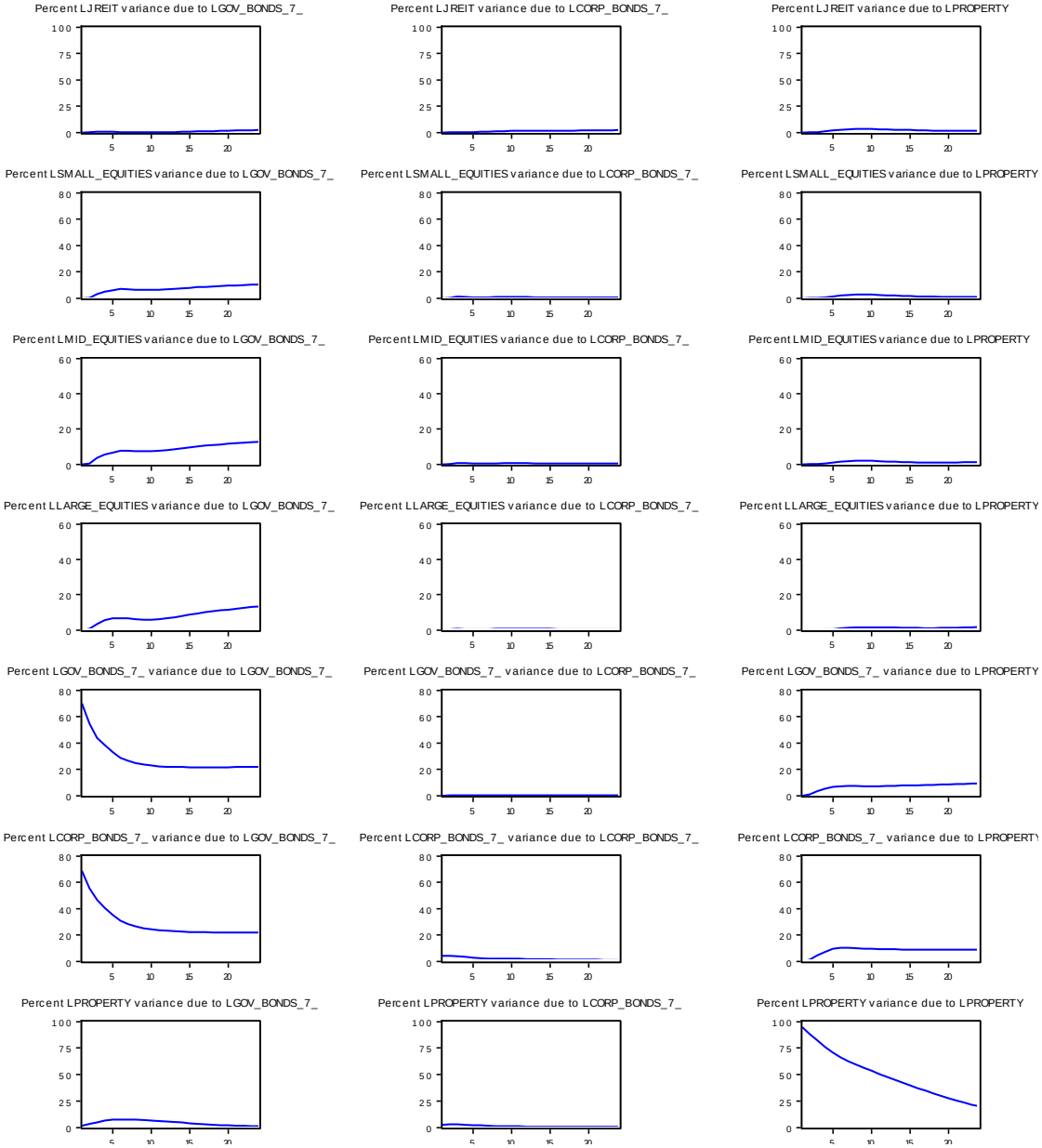


図 3.3.3.2　分散分解

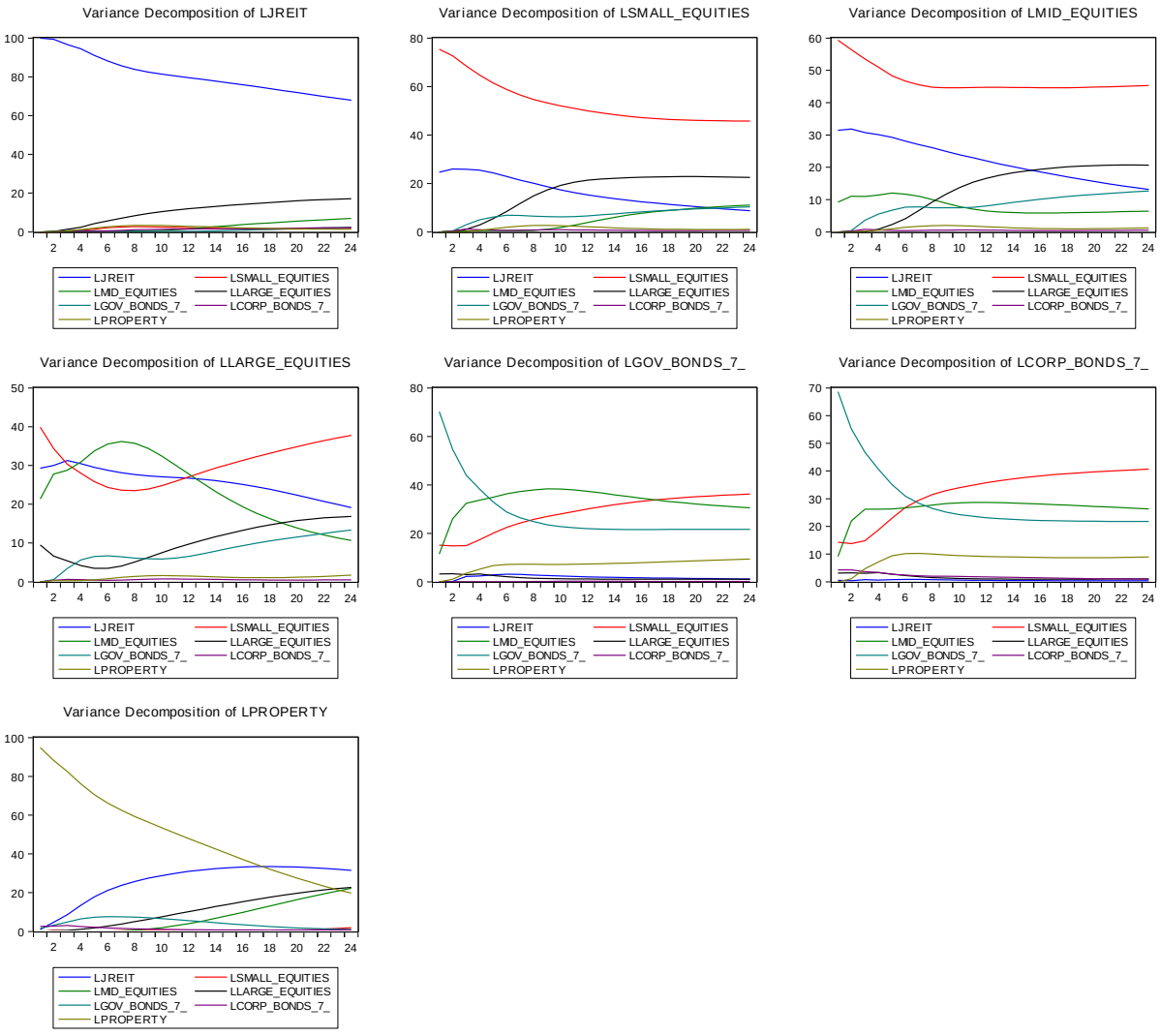

Variance Decomposition of LJREIT
Variance Decomposition of LSMALL_EQUITIES
Variance Decomposition of LMID_EQUITIES
Variance Decomposition of LLARGE_EQUITIES
Variance Decomposition of LGOV_BONDS_7_
Variance Decomposition of LCORP_BONDS_7_
Variance Decomposition of LPROPERTY
LJREIT
LSMALL_EQUITIES
LMID_EQUITIES
LLARGE_EQUITIES
LGOV_BONDS_7_
LCORP_BONDS_7_
LPROPERTY

図 3.3.3.3　分散分解（不動産の分散分解）

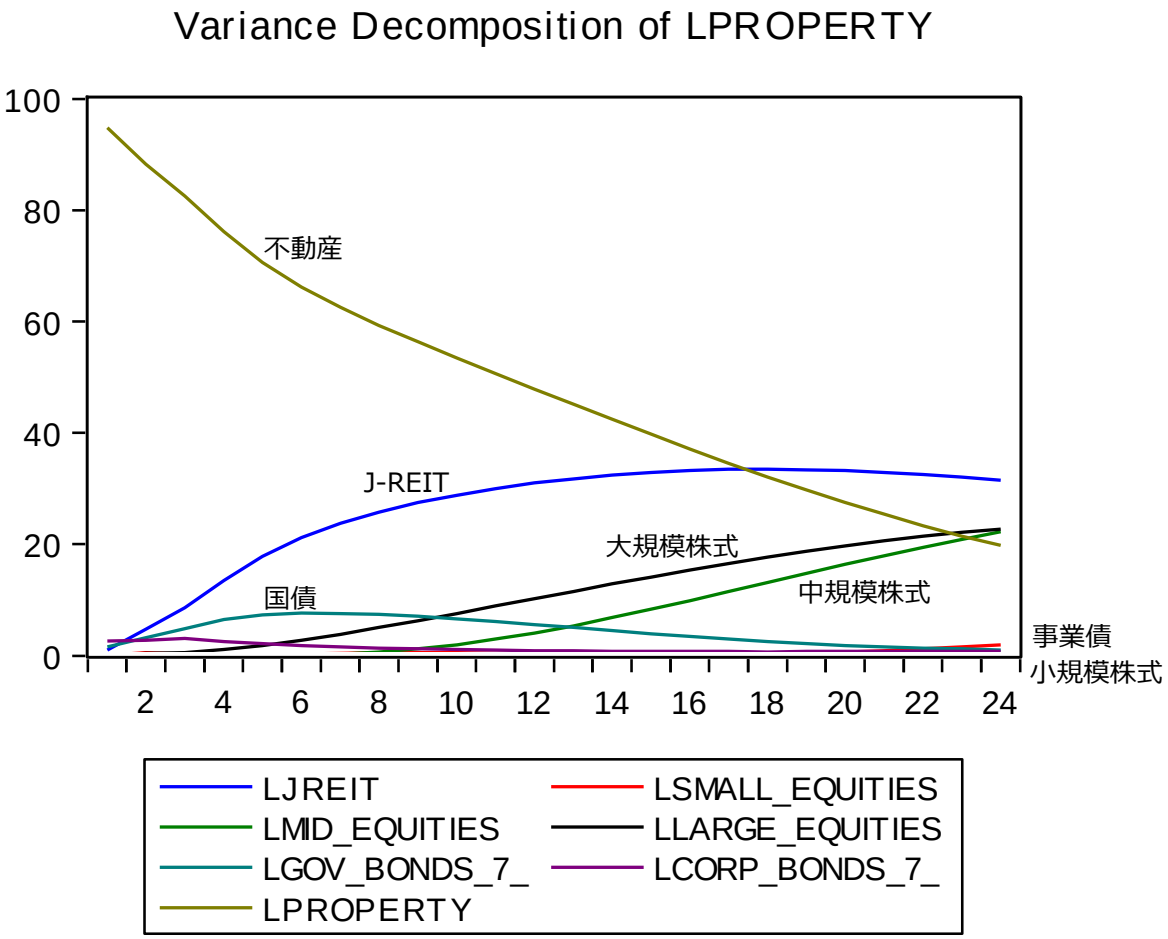
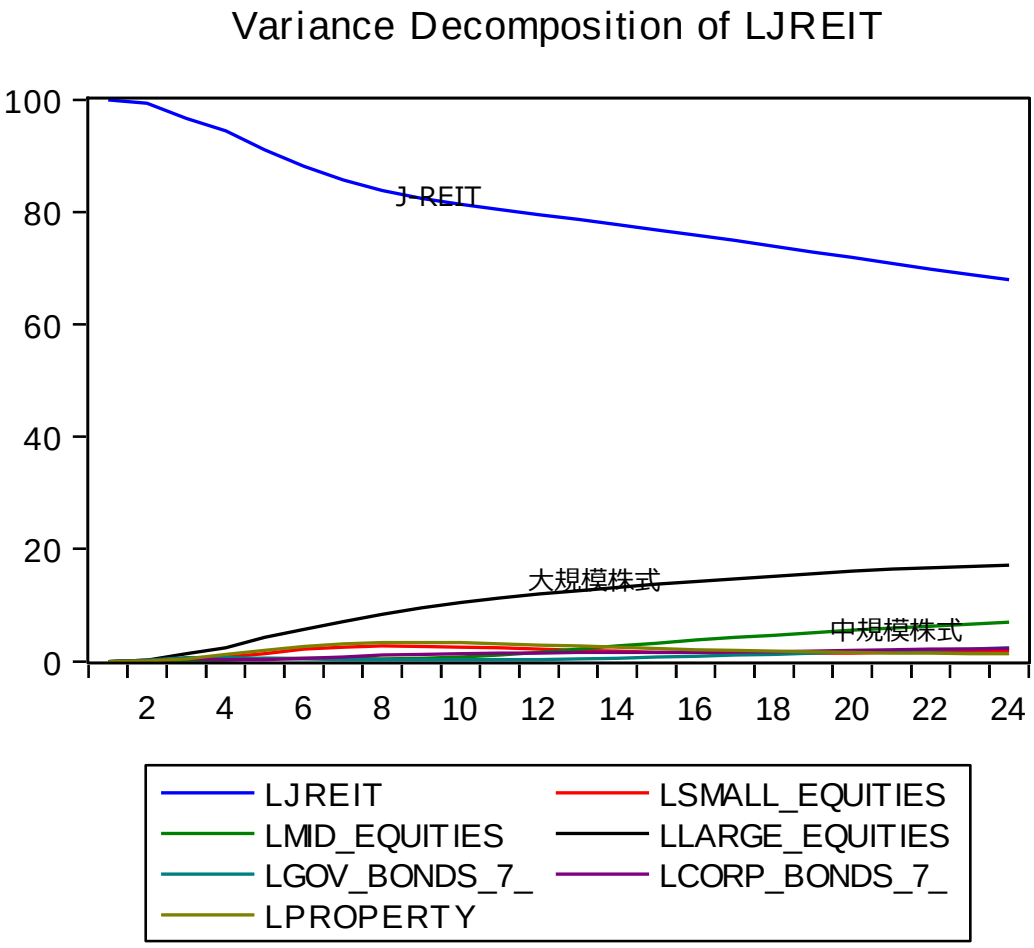


図 3.3.3.4　分散分解（J-REIT の分散分解）



4　流動性擬制化でのリスク回避係数別の長期ポートフォリオ選択

本章の位置づけは，次章にて行う非流動性を考慮した多段階意思決定モデルの構築に先立てた前準備ともいってよい。第一の目的は，まず次章に向けたリスク回避係数モデルの導入である。第１章にて議論した通り，投資家のリスク回避係数はポートフォリオ選択において支配的な役割を持つ。一般的に用いられる最適ポートフォリオや最小分散ポートフォリオでは特定の投資家もしくは特定の仮定（例えば無リスク資産が存在する）のうえで成り立つ分析モデルであるが，これでは表現できない事例も多く存在する。本章ではこのリスク回避係数をポートフォリオ分析モデルに取り込む。第二に，非流動性と複数期間モデルの必要性について確認することにある。いままで不動産の非流動性と複数期間モデルへの拡張（多段階意思決定）の必要性を議論してきた。しかし，本章では，まずは流動性を犠牲化した状態で，つまり非流動性を考慮しない状態で，毎期すべての資産がリバランス可能であると仮定して平均・分散モデルを適用する。そのときのポートフォリオにおける不動産の役割を評価してみることにする。そもそもこの段階で不動産への投資配分が確認できなければ，不動産の役割がないともいえよう。国外の先行研究では，こうした非流動性を考慮しない単純な平均･分散モデルの適用が不動産への過剰評価であると指摘している。日本においても同様の結果が見られるのだろうか？これが本章での問いである。

4.1　分析手法

4.1.1　ウィンドウ移動型平均分散モデル

分析手法は，不動産導入による影響のダイナミクスをも調べるため鈴木・高辻(2013a)の提案したウィンドウ移動型平均分散モデルを採用する。しかし，ここでは，投資家をリスク回避の大きさによってタイプ分けし，それぞれのタイプの投資家がどのように不動産のウェイトを評価するかを見ることにする。先行研究の内容をも含めたより包括的な分析である。

不動産投資を追加した場合のポートフォリオに着目して，その資産構成比とリスク調整後リターンの変化を時間の変化とともに分析する。具体的には次のように行う。いま1期からT期までの多資産それぞれについての総合収益率データがあるとする。①まず1期からτ期までのτ期間（$\tau < T$）のデータをもとに次の平均・分散モデルを解く。この際のτ期間をウィンドウ期間と呼び，5年間に設定する。②次に同様にn期から$n+\tau-1$期までのτ期間について同様の分析を行う（$n = 2,3,4\cdots$）。③つまりτ期間をウィンドウとして，それを1期ずつ（1カ月単位）ずらしながら平均・分散モデルを適用し，ポートフォリオを構成する資産について，不動産を含めた場合と除外した場合とでどのような変化があるかを観察しようとするものである。まずは，不動産を除いた多資産ポートフォリオを構築し，次いでそこに不動産を追加した場合の影響度を計る。なお，不動産取引の低い流動性を考慮し，空売りは考えないものとする。つまり2次計画法のウェイト解の制約はあくまでも0から1の間に解がある。

$$\boldsymbol{w}'\boldsymbol{m} - \theta(\boldsymbol{w}'V\boldsymbol{w} - \sigma_0^2) \;\rightarrow\; \max_{\boldsymbol{w}\geqq\boldsymbol{0}} \tag{4.1.1}$$

$$s.t \quad \boldsymbol{w}'\boldsymbol{1} = 1$$

$\boldsymbol{w}$：原資産に対するウェイト

$\boldsymbol{m}$：原資産の期待収益率

V：原資産の収益率の分散共分散行列

σ_0^2：分散制約

4.1.2　リスク回避係数の導入

投資家のリスク回避係数はポートフォリオ選択における重要な要素となっているにも関わらず，これら先行研究は異なるリスク回避係数をもつ投資家を想定したものではない。この重要性については第 1 章にて議論してきたように，投資家のリスク選好は，ポートフォリオのリターンやリスクそして構成を決定する重要な要因といえる。

リスク回避による投資家のタイプ分けの方法について検討する。平均・分散モデルを「分散一定の制約の下で期待収益率を最大化すべく各資産のウェイトを決めよ」と定式化すると，ラグランジェ乗数 θ は分散制約を 1 単位変化させたときの最大の期待収益率の変化を意味する。つまり期待収益率で計った分散 1 単位の価値である。これが大きい投資家はリスク回避型であり，小さければリスク非回避型と解釈できる。そこでこのθ を「リスク回避係数」と呼ぶことにし，これで投資家のタイプを分けることにした。

θは，ポートフォリオダイアグラムとの関係で次のように解釈できる。いまポートフォリオの期待収益率をm_p，標準偏差をσ_pとする。ポートフォリオダイアグラムを$m_p - \sigma_p$座標平面でなく$m_p - {\sigma_p}^2$座標平面で描くとする。投資家の効用関数を

$$u = m_p - \theta{\sigma_p}^2 \tag{4.1.2.1}$$

と仮定すれば，効用水準がuのときの投資家の無差別曲線は，$m_p - {\sigma_p}^2$座標平面上で

$$m_p = \theta{\sigma_p}^2 + u \tag{4.1.2.2}$$

と直線で表される。このときリスク回避係数θは，無差別曲線とポートフォリオダイアグラムとの接線の傾きを表している。

次にリスク回避タイプ別の投資家の不動産の評価方法について考える。いまリスク回避係数をいくつかに分けてk番目のリスク回避係数をθ_kとする。このタイプの投資家の効用関数をu_kとすれば，投資家は次の効用最大化問題を解いて原資産に対する投資配分ウェイトを決定することになる。

$$u_k = \boldsymbol{w}'\boldsymbol{m} - \theta_k\boldsymbol{w}'V\boldsymbol{w} \;\rightarrow\; \max_{\boldsymbol{w}\geqq\boldsymbol{0}} \tag{4.1.2.3}$$

$$s.t \quad \boldsymbol{w}'\boldsymbol{1} = 1$$

解を$\boldsymbol{w}_k$としたときのポートフォリオの期待収益率を$m_k = {\boldsymbol{w}_k}'\boldsymbol{m}$，分散を${\sigma_k}^2 = {\boldsymbol{w}_k}'V\boldsymbol{w}_k$とする。このときの最大化された効用$u_k^*$は

$$u_k^* = m_k - \theta_k{\sigma_k}^2 \tag{4.1.2.4}$$

で表される。

さて，これまで投資家の効用関数を(4.1.2.3)式，(4.1.2.4)式のように仮定してきたが，これらは特段に期待効用の理論を背景としてここで論理的に導いたものではない。そこでむしろこの

効用のことを，改めてリスク調整済み収益率（RAR: risk adjusted return）と呼ぶことにする。すると(4.1.1)式を例に挙げると，リスク $\sigma_k{}^2$ を伴う不確実な期待収益率 m_k は，リスクのない確実な期待収益率 $m_k - \theta_k\sigma_k{}^2$ に等しいという言い方ができることになる。

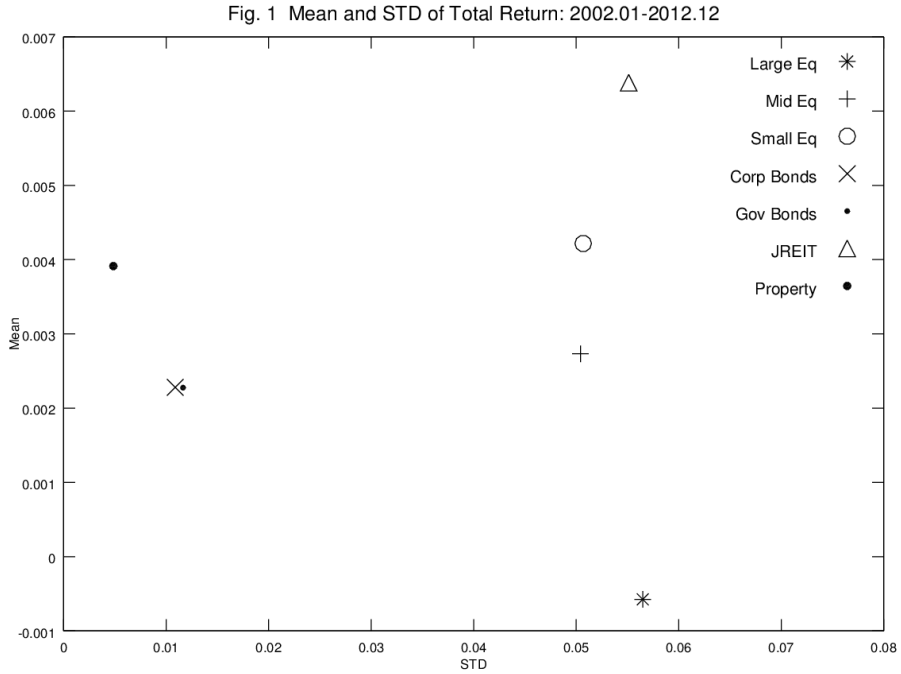
4.2　研究データとリスク回避係数

4.2.1　研究データ

研究対象とした資産クラスは株式，債券，および不動産を採用する。株式指数は規模に応じ細分し，㈱東京証券取引所の東証一部大型・東証一部中型・東証一部小型を用いる。債権は，国債と事業債を区別する。国債・事業債には㈱大和総研のダイワ・ボンド・インデックス国債（7年以上）・事業債（7年以上）を用いる。不動産にはMSCI Inc.のIPD Japan Property Indexを採用する。REITは㈱三井住友トラスト基礎研究所のSMTRI J-REIT総合インデックスを，そしてRMBSは㈱大和総研のダイワ・ボンド・インデックスRMBSを採用する。借入金等の影響は考慮しない。採用指数はすべて配当込のものを採用した。用いる指数の観測期間は，2002年12月から2012年12月（132期間）で，月次での観測データである。上記すべての指数の対数一階差を月次リターンとして使用する。なお無リスク資産として一般的に用いられる国債は，流動性が認められ，実際には市場にて取引が行われおり，その価格は変動するリスクを負っている。そこで本研究では国債をもリスク資産として扱う。

図 4.2.1.1 から各資産クラスのリスク・リターン特性がわかる。大規模株式は最も高い標準偏差があるにも関わらず，リターンは最も低かった。株式資産クラス（大規模株式・中規模株式・小型株式・REIT）は総じて標準偏差が高かったものの，リターンはそれぞれに幅がある。債券（国債・事業債）は標準偏差が相対的に低い。不動産は，標準偏差が最も低いが，リターンは 3 番目に高かった。しかし，言うまでもなく，原資産のリスク・リターン特性を比較しただけでは，不動産への投資配分比率の想定はできない。そこで以下，リスク回避係数が異なる投資家を想定し不動産への追加投資の影響を確認していく。

図 4.2.1.1　原資産の収益率の平均・分散



4.2.2　不動産投資指数

不動産の指数には鑑定評価ベースの実物不動産投資指数を用いるがその特性についてはいくつか述べておく必要がある。本研究では構成要素である不動産が実際の市場参加者によって投資された実績値を用いて構築されていることから採用した。同不動産総合収益指数は，インカム・リターンとキャピタル・リターンを合成して作成されている。インカム・リターンは，期中に得られた収益から期中に生じた支出を差し引いた純収益が，当該不動産の投下資本と比較した場合における収益率を表す。キャピタル・リターンは，投下資本成長率とも呼ばれ，当期と前期の資産価値の変動を表す（この際，資本的支出収入があれば考慮する）。本研究では指数の自然対数をレベル・データとして用いる。

当該不動産指数は，鑑定評価をベースとした不動産指数である。鑑定評価は市場価格のプロキシーとしての有用性が広く認識される一方で，多くの問題点も指摘されている。代表的なものとして平滑化問題があり，これは市場で実際におこっている市場変動を上手く追跡することができていないという特性である。これについては，第 1 章 1.2.6 にて議論されているように，この平滑化問題は個別不動産レベルにおいての影響は小さいものの，指数構築の為に集合化されると影響は大きくなることも報告されているように(Brown & Matysiak, 2000, Bond *et al,* 2012)，無視できない問題である。

つまり，鑑定評価をベースとして不動産指数は生来的にその問題点を有しているために，その取扱いと得られた結果の解釈には注意する必要がある。不動産指数の平滑化問題を，非平滑化する方法は様々なものが提案されているもののその議論は未だ続いている。例えば，平準化を修正する方法はいくつかの提案がなされているが，その問題点も指摘されている。Key & Marcato (2007) は平準化を修正するために用いるモデルよりも用いるパラメーターがより重要だとしたし，Bond *et al,* 2012)は平滑化問題を解決する際に一般的に用いられるAR filtersは平滑

化を誇張して捉えてしまうため適切ではなく，ARFIMAがより適切であると提案した。他にもヘドニック法を用いて品質の調整を行うものもある。Devaney & Martinez Diaz（2010）はUKデータを用いて取引データと指数をリンクさせる試みも行った。しかし，本研究は時系列データの特性に関する知見を得ることを範疇とするため，当該不動産指数の非平滑化は行わないものとした。本研究ではあくまでも不動産の非流動性をいかにしてポートフォリオ選択のおいて取り扱うのかを議論するものであるからして，まずは本来の目的に注力することとした。非平滑化を行っていない結果であるからして，今後非平滑化済みデータを用いた研究結果との比較対象となることも意図している。

4.2.3　リスク回避係数

7 つの原資産の総合収益率の全期間（132 期間）のデータを用いてポートフォリオ分析を行った。ポートフォリオダイアグラムを $m_p - {\sigma_p}^2$ 座標平面上で描いたものが図 4.2.2.1 である。これをもとに，最も大きな期待収益率から最小分散ポートフォリオの期待収益率までの間をほぼ均等に 4 区分する点を設定し，それに対応するポートフォリオダイアグラム上の点の接線の傾きを求め，それをリスク回避係数θ_kとした。これのリスク回避係数を用いることにより，異なるリスク選好を持つ投資家のポートフォリオを再現することが可能となる。リスク回避係数が低い場合にはリスクを許容できる投資家であり，大きい場合にはリスク回避型（最も高い場合はリスク最小型）の投資家である。

図 4.2.2.1　リスク回避係数θ_kの決定

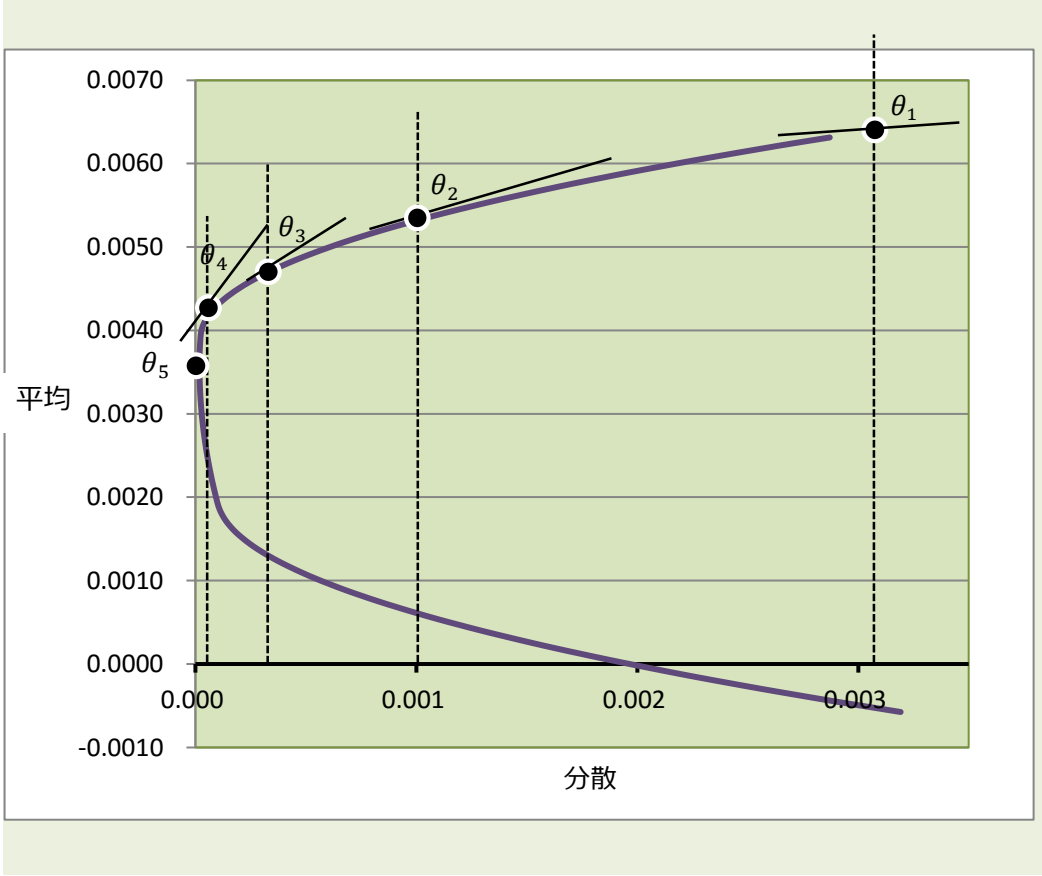


表 4.2.2.2　リスク回避係数θ_kの決定

リスク回避係数θ_k	値
θ_1	0.40　　リスク回避小
θ_2	0.70
θ_3	1.20
θ_4	6.00　　リスク回避大
θ_5	9999.00　（最小分散ポートフォリオ）

4.3　分析結果

4.3.1　リスク調整済み収益率（RAR）の時系列変化

データの全期間である 132 期間のうち，第 60 期目から 61 期，62 期，･･･，132 期とそれぞれの時点において，その過去 60 期間（5 年間）のデータをもとに収益率の平均・分散を求め，投資家のタイプ別に RAR 最大化問題を解くという分析を行った。まず，「不動産を含む 7 つの原資産からなるポートフォリオ」と「不動産を除く 6 つの流動性資産からなるポートフォリオ」との 2 つについて，それぞれの RAR を時系列的に比較してみる。それぞれ R-RAR，L-RAR と呼ぶことにする。R-RAR が L-RAR より大きいとき，当然ながら不動産をポートフォリオに含むことが望ましいはずである。それを時系列的に比較しておくことがねらいである。

さて，図 4.3.1.1 にみるように，R-RAR（青色）が L-RAR（赤色）を上回る時期が連続して存在する期間がある。これは，不動産の原指数が上昇基調で他の流動性資産の原指数が下降基調の時期に相当する。この期間はいわば不動産保有が望ましいと考えられる期間である。これは金融危機を含む期間において顕著にみられていることから，不動産市況が悪い時期にパフォーマンスを改善させる役目を担っていることがわかる。

次に，リスク回避の大きな投資家ほど R-RAR 優位の期間が長くなることが読み取れる。投資家はリスク回避係数により異なるポートフォリオを選択するが，リスク回避係数が高い投資家にとっては，より長い期間で不動産を組み込むことにより，より良いリスク調整リターンを享受できることがわかる。

最後にリスク回避が最も大きな場合は，全期間に渡って R-RAR が優位となっている。これにより不動産はリスク回避型投資家に選好される資産クラスであることがわかる。

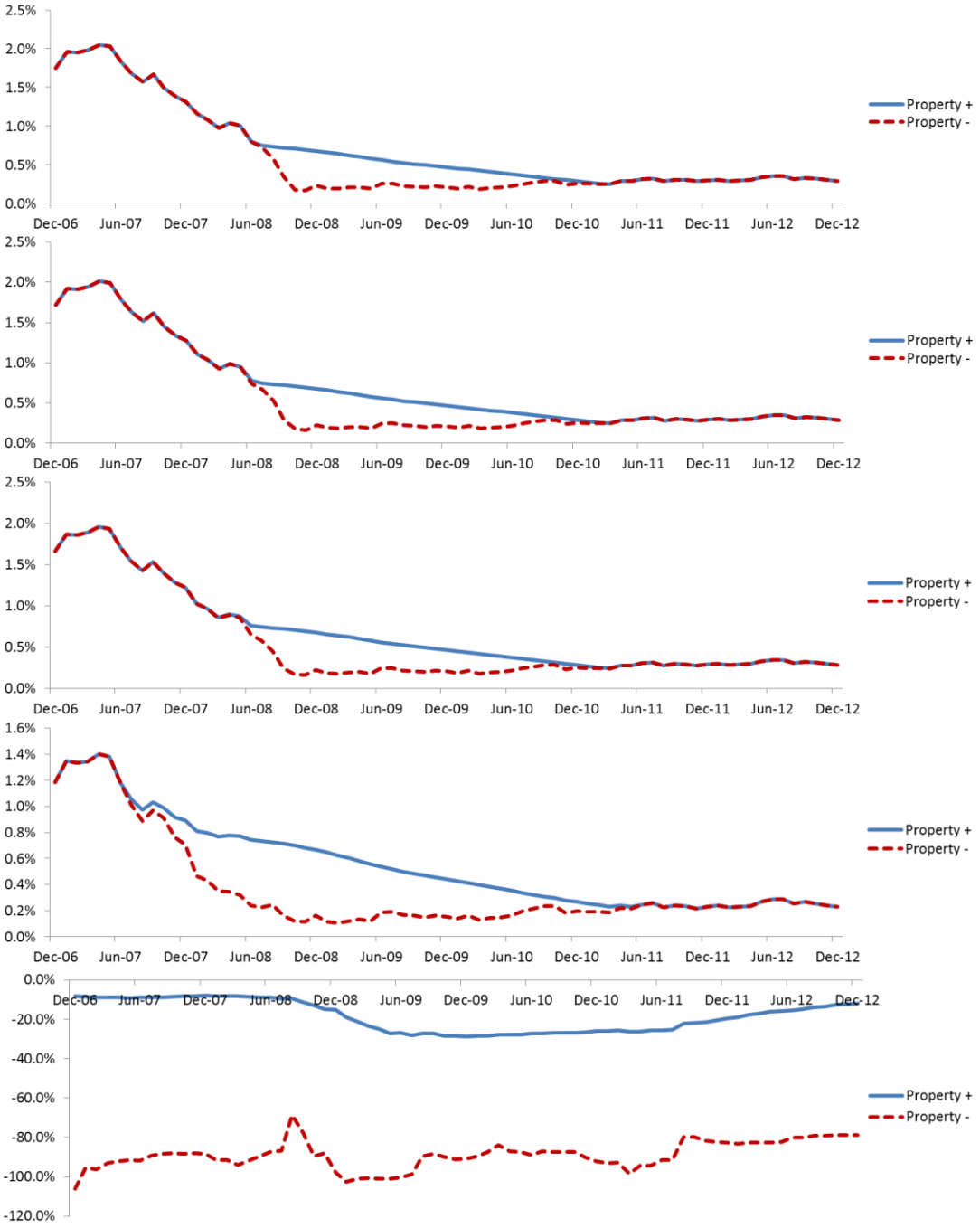
4.3.2　不動産投資配分比率の時系列変化

前節では不動産をポートフォリオに含めた場合におけるパフォーマンスの推移を見た。しかしこれは，実際にポートフォリオへの資産配分比との枠組みにて理解されなければならない。

R-RAR と L-RAR との時系列比較に見るように，データの時期的な性格もあり（不動産以外の流動性資産の総合収益指数が下降基調であるということから）不動産への投資配分はかなり大きな割合で明確に現れている(図 4.3.2.1)。ほぼ 100%という期間が存在する。

リスク回避の度合いが大きいほど（γ が大きいほど）不動産への投資配分が大きくなることが読み取れる。つまり，不動産はリスクヘッジ目的に選好される資産だという示唆である。

図 4.3.1.1 各リスク回避率別のポートフォリオにおけるリスク調整後リターン（昇順 θ1－5）

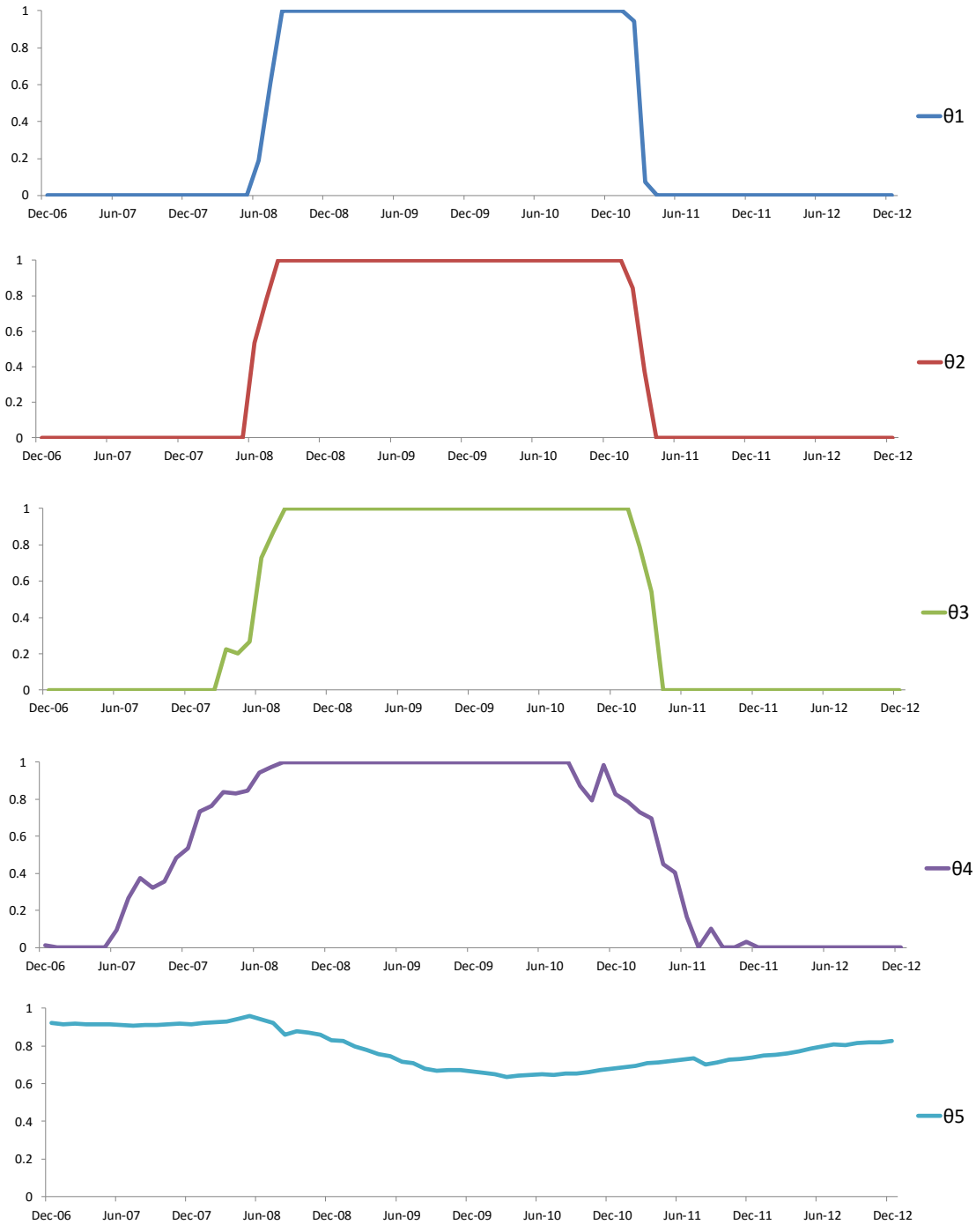


(注)

不動産を含む 7 つの原資産からなるポートフォリオ：R-RAR（青色）

不動産を除く 6 つの流動性資産からなるポートフォリオ：L-RAR（赤色）

図 4.3.2.1　リスク回避係数別での不動産投資配分比率の時系列変化



4.3.3　リスク回避係数別投資家への影響

以下，異なるリスク回避係数を想定した投資家をより詳しく見ていきたい。図 4.3.3.1～4.3.3.5 に分析結果を整理している。

リスク回避係数 θ1 –θ3

リスク回避係数が最も低い θ1 を持つ投資家（いわゆるリスクテーカー）のポートフォリオ構築について見ていこう。同投資家は，リスクに対する耐性が最も高いため，ベストな RAR を提供するポートフォリオを選択する。

まずはポートフォリオ構築をみる。不動産を含まない場合での構成比に焦点を当てると，必ずしも常に複数資産クラスの組み合わせによってポートフォリオ構築が行われるわけではなく，およそ 1 年間・1 年間・1 年間・2 年間・2 年間の間隔で，特定の個別資産クラスのみに資産配分されていることがわかる（各間隔において順番に J リート，中規模株式，国債，事業債，そして大規模株式である）。次に不動産を追加した場合の影響を見る。以前は 2008 年 6 月以降より 2010 年 12 月まで組み入れられていた中規模株式，国債，事業債が不動産に入れ替わった。同期間は金融危機が開始した時期でもある。

RAR に着目すると，やはり不動産が組み込まれた時期には，不動産が RAR を改善させていることがわかる。不動産追加によって同期間の平均リターンが改善していることがわかる。つまり，不動産以外の資産クラスのパフォーマンスが悪く，不動産はポートフォリオ内の押し上げ要因（もしくは下支え要因）となっていた。次に分散に着目すると，不動産を加えることにより同期間の分散が押し下がったことがわかる。つまり，同資産クラスはリターンを押し上げるのみならず，リスクも減らしていたことになる。

この θ1 投資家ポートフォリオの傾向は，θ2 と θ3 の両方でも見ることができる。

リスク回避係数θ4

次にリスク回避係数が二番目に高いθ4 を持つ投資家のポートフォリオ構築を見ていく。θ1－3 の投資家と傾向は似ているが，違いもある。

ポートフォリオ構築をみてみると，2009 年 3 月時点までは，複数の資産クラスで組み合わされている。リスク回避係数θ1－3 においては単一資産クラスにて資産配分比が独占されていることからもθ4 ポートフォリオが他と異なることがわかる。2009 年 3 月時点以降となると，事業債と国債によって独占されているが，これはθ 1－3 ポートフォリオと同じである。不動産の組み入れを開始する時期がより早い。つまり，リスク回避係数が高い投資家にとって，より選好される資産クラスが不動産と言える。

RAR は，不動産を含むことによって，より良い結果となった。2007 年 12 月前後においては，不動産を含むことにより平均リターンの減少がみられるものの，分散は改善を見せたために最終的に RAR が改善した。

リスク回避係数θ5

最後にリスク回避係数が最も高いθ5 を持つ投資家ポートフォリオ構築を見ていく。リスクの最も低い最小分散ポートフォリオを選択する投資家でもあり，鈴木・高辻(2013a)の想定した投資家と同様である。彼らは同投資家にとって①不動産は金融危機において分散効果を発揮すること，そして②資産構成比には時間的変動があることを報告している。

不動産を追加しない場合の構成比をみてみると，θ5 ポートフォリオは他の異なるリスク回避係数を想定したポートフォリオと大きく違うことがわかる。他のポートフォリオでは，資産配分が特定の資産クラスに対してのみ行われていた。しかし，観測期間を通じ一貫して，複数資産クラスの組み合わせによってポートフォリオ選択がなされている。最も比率として大きな資産クラスは，事業債と国債の二つである。次に不動産を追加した場合，事業債と国債の比率は大きく減り，かわりに不動産が多く組み込まれることとなった。

RAR についても全期間を通じて改善を見せており，リスク回避係数の高い投資家にとって，不動産が魅力の高い資産クラスであることがわかる。

金融危機後に不動産の資産配分比が減っている。分散は観測期間を通じて，不動産を含まない場合よりも減少している。平均リターンは，当初不動産が優位であった。しかし，平均リターンは金融危機以降から減少していき，2011 年 6 月以降は，不動産を含まないポートフォリオの平均リターンを下回る結果となった。

4.4　本章のまとめ

ここまで，リスク回避係数を導入したポートフォリオ分析モデルの構築と，それを用いての不動産の投資比率を分析してきた。リスク回避係数の導入は次章での本格的なモデル構築にむけた前準備的意義が強い。実データを用いた分析は，次章での分析にあたっての比較対象として，不動産の特性である非流動性を考慮せずに行った。以下，本章にて得られた知見である。

リスク回避係数の導入は，異なる投資家を想定した上でのポートフォリオ分析は，有効なものと考えて良いだろう。リスク回避係数をパラメーターとして分析を行った結果，同パラメーターを意思決定の基礎とした合理的なアウトプットを得ることができた。次章でのモデル構築に含めても良いだろう。

不動産の分散効果は，その効果に差はあるものの，いかなるリスク回避係数を持つ投資家にとっても認められることを確認した。特に金融危機時にはその効果が共通して見られた。
鈴木・高辻(2013a)の指摘するように不動産の役割は時間的変化を持つことが確認された。つまり不動産の役割は，一定に推移することはなく，絶えず評価され続ける必要がある。同時に，ポートフォリオ全体において選好される時期とされない時期があるため，その時期の見極めが特に重要となる。

分析を通じて，不動産の資産配分比（または組み入れ）は，リスク回避係数が高くなるほどに増えていくことがわかった。また，同時にポートフォリオのリスク調整後リターンを改善させることも見て取れた。不動産の分散投資効果が最も発揮されるのは金融危機時のように市況が下を向いているときである。これらのことから，不動産は金融危機時にリスク分散役として有益な資産クラスであったといえよう。

完全リスク回避型投資家のポートフォリオでは，不動産が常に RAR を改善させることから継続して組み込まれていた。つまり，同投資家にとって不動産は常に選好される資産クラスである。

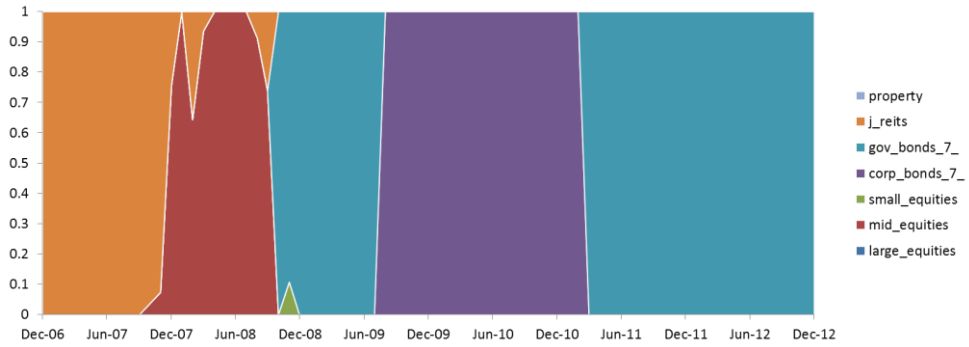
リスク回避係数が高くなっていくに従い，不動産へのアロケーションが進んでいくが，リスク耐性がある投資家にとっても，金融危機時において不動産を組み入れていることが見られる。つまり不動産は，金融危機時においても魅力的なリスク調整後リターンを，リスク回避係数で想定したいかなる投資家にとっても提供をしていたこととなる。

しかし，ここでは不動産の非流動性を考慮していないのでいわゆる過剰評価であることが見て取れる。不動産は非流動性資産として理解をされており，同特性はポートフォリオ選択に影響（特に課題な資産配分比）を及ぼすと理解されている。事実，本結果内でも不動産へのアロケーションは極端に大きく，本結果のみをもって不動産を理解したと考えるのは危険である。次章においてこの非流動性について見ていきたい。

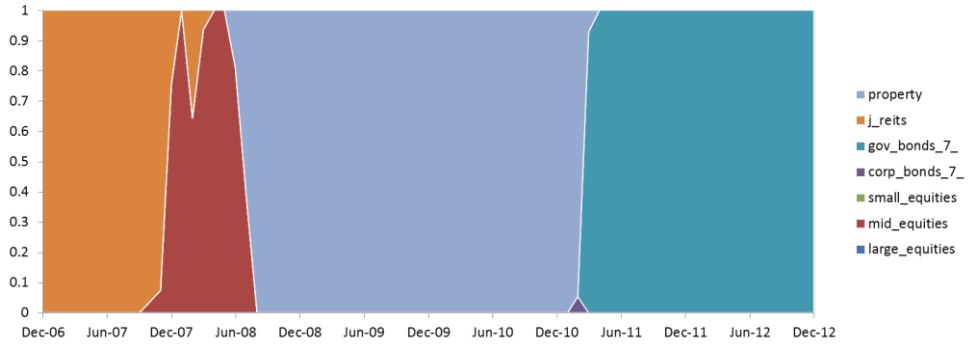
また，鑑定評価ベース指数のもつ平滑化問題の影響も忘れてはならない。市場の変動を適切に捕捉できない同指数は，変動（ポートフォリオ選択でいう分散）を過小評価しており，その分だけ不動産に対して過大な資産配分がなされている可能性も否定することはできない。これは使用したデータそのものの問題であるため本研究の範疇ではないが，非平滑化処理を加えたデータを用いた分析は今後の課題として残る。

図 4.3.3.1 リスク回避係数 θ1

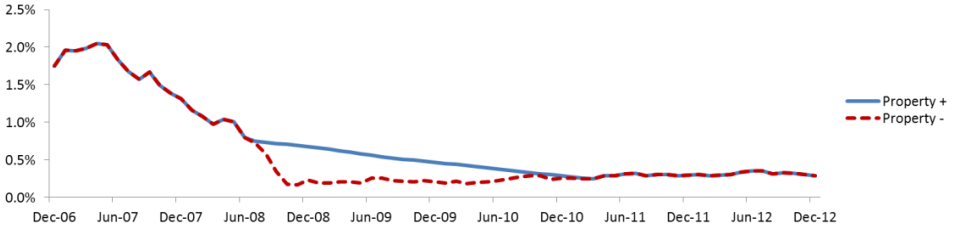
資産配分比の時系列変化：不動産を含まない場合



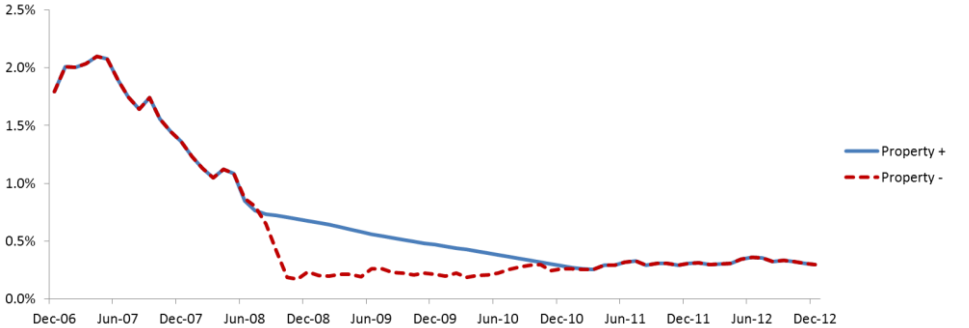
資産配分比の時系列変化：不動産を含む場合



リスク調整後リターンの時系列変化



平均リターンの時系列変化



分散の時系列変化

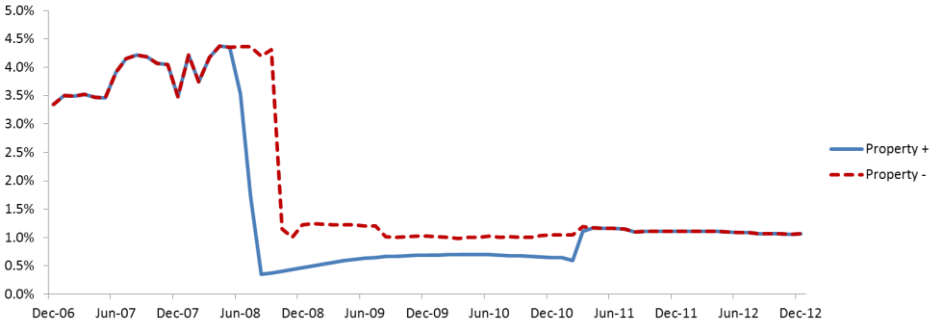
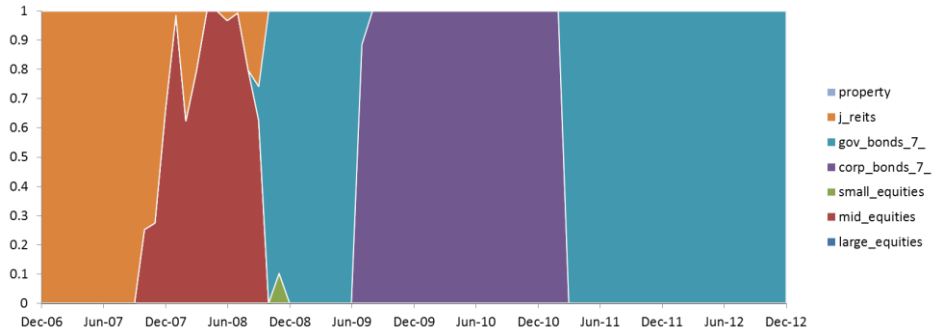
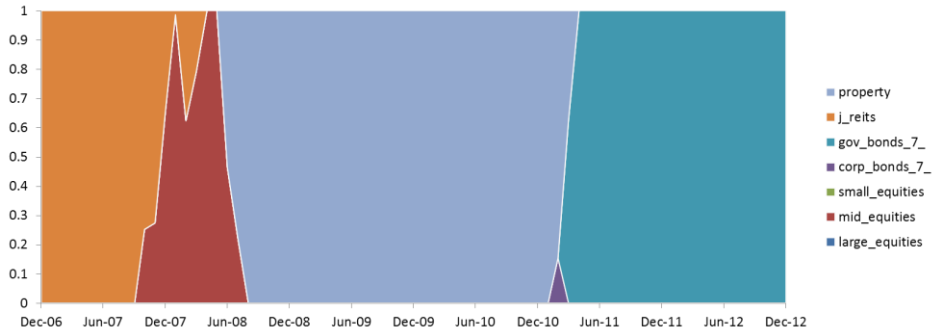


図 4.3.3.2　リスク回避係数 θ2

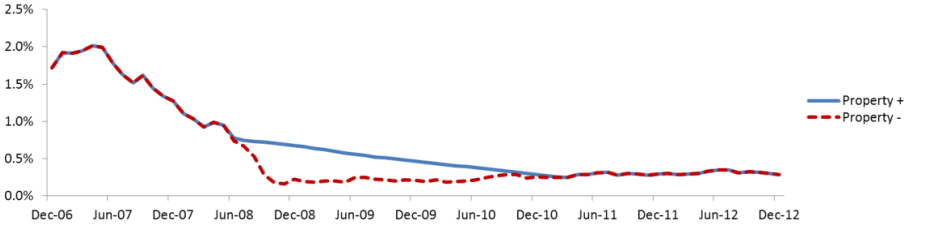
資産配分比の時系列変化：不動産を含まない場合



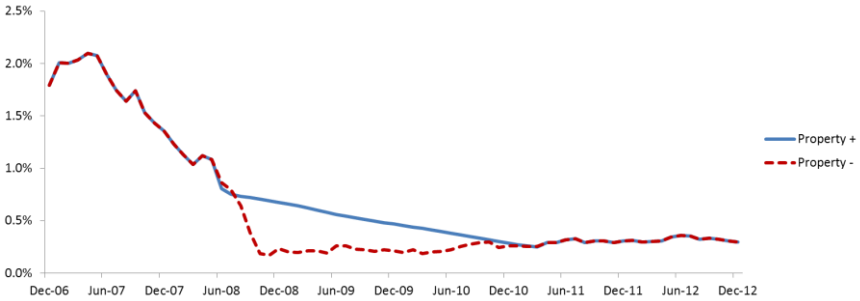
資産配分比の時系列変化：不動産を含む場合



リスク調整後リターンの時系列変化



平均リターンの時系列変化



分散の時系列変化

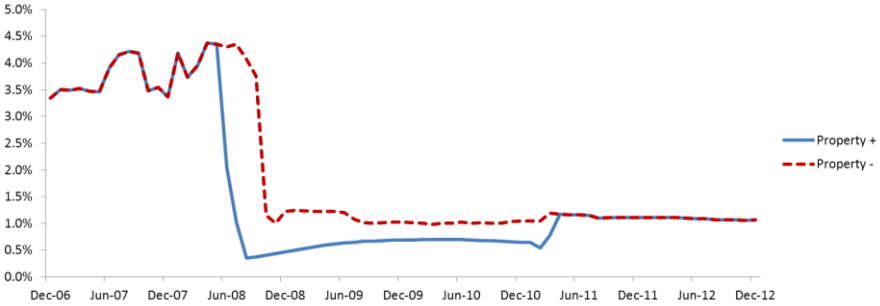
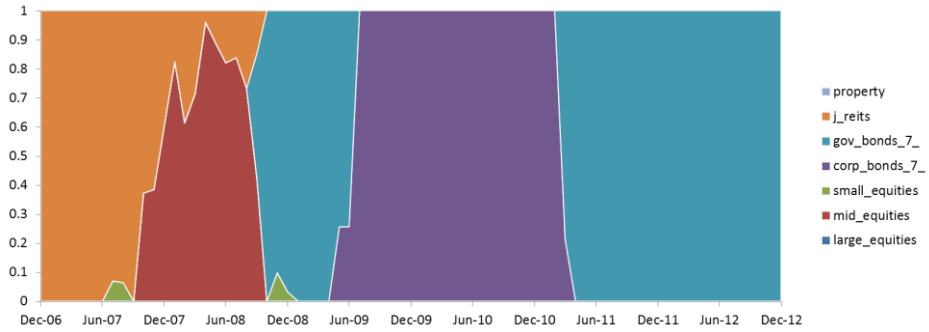
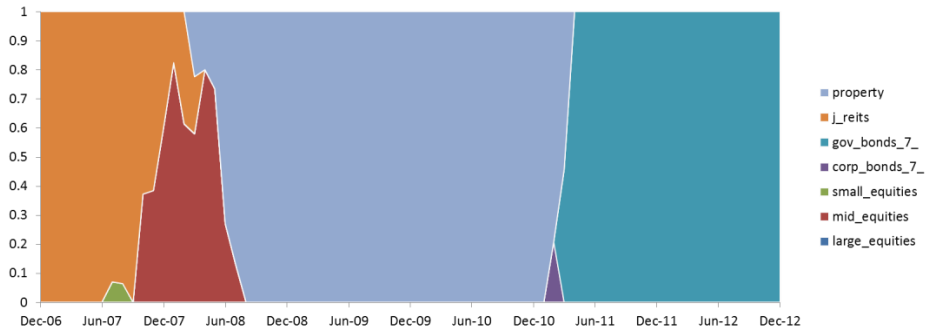


図 4.3.3.3　リスク回避係数 θ3

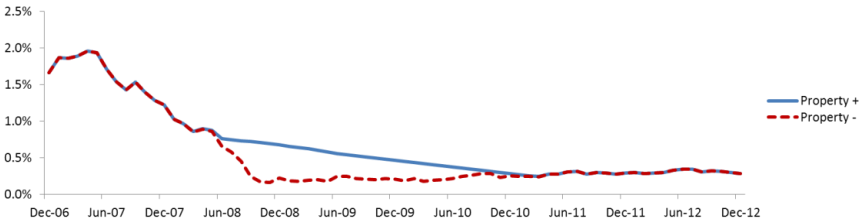
資産配分比の時系列変化：不動産を含まない場合



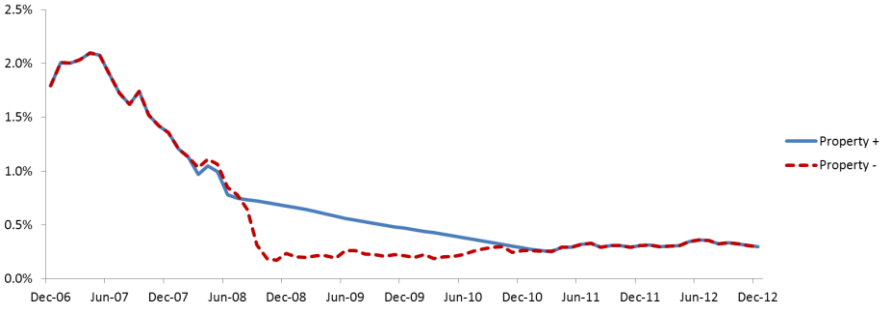
資産配分比の時系列変化：不動産を含む場合



リスク調整後リターンの時系列変化



平均リターンの時系列変化



分散の時系列変化

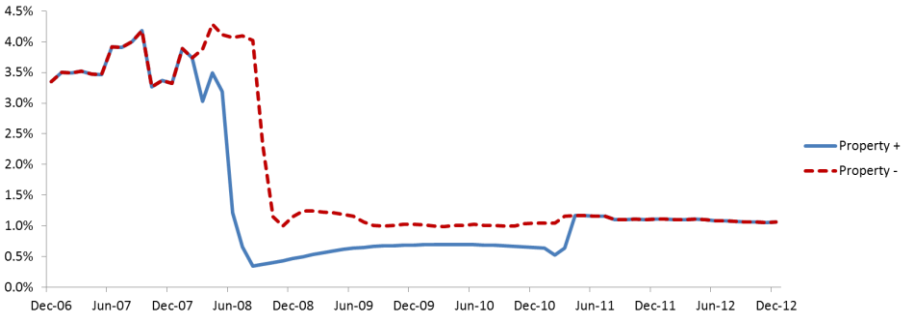
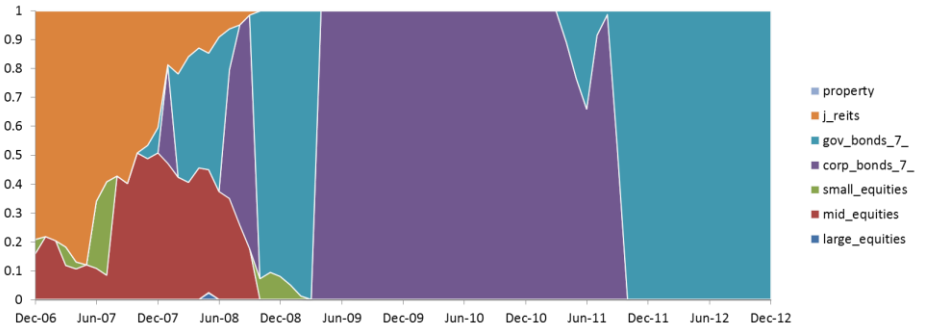
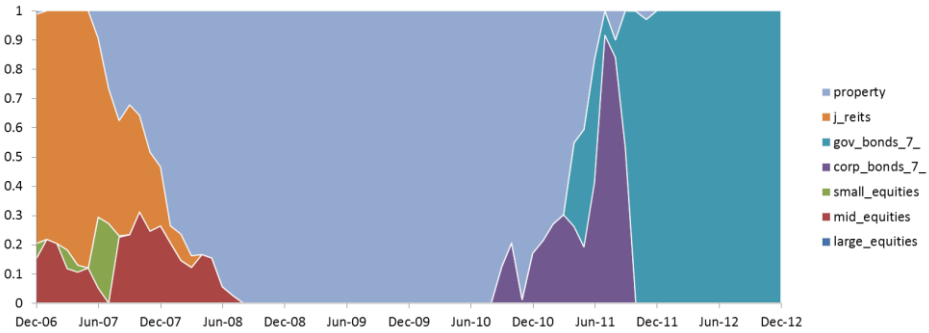


図 4.3.3.4　リスク回避係数小(θ4)

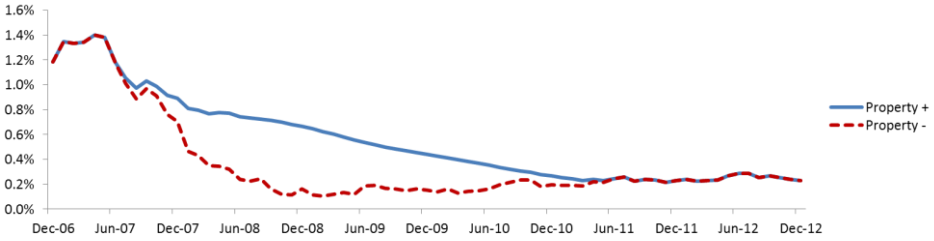
資産配分比の時系列変化：不動産を含まない場合



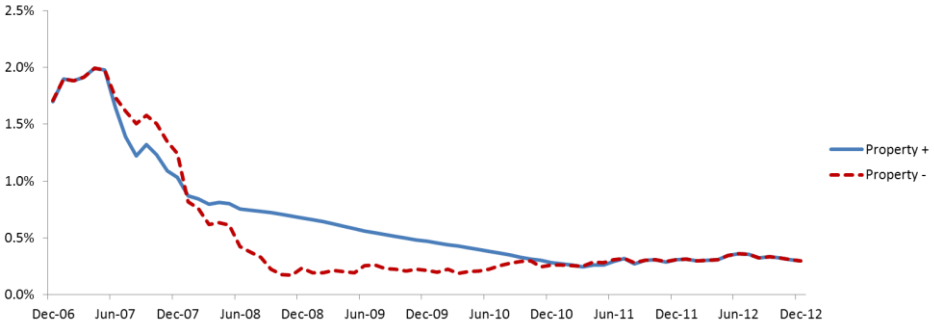
資産配分比の時系列変化：不動産を含む場合



リスク調整後リターンの時系列変化



平均リターンの時系列変化



分散の時系列変化

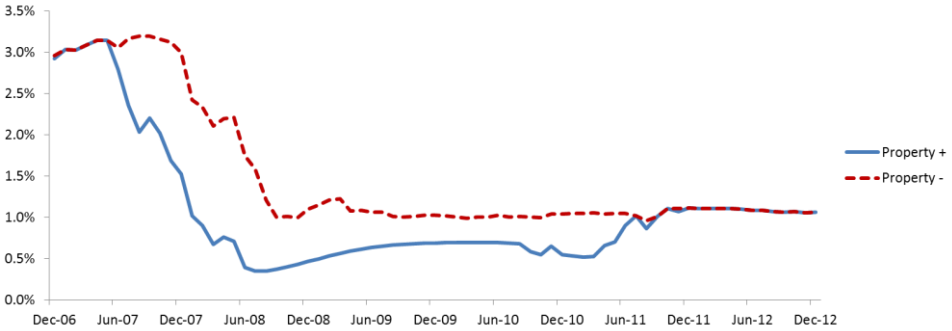
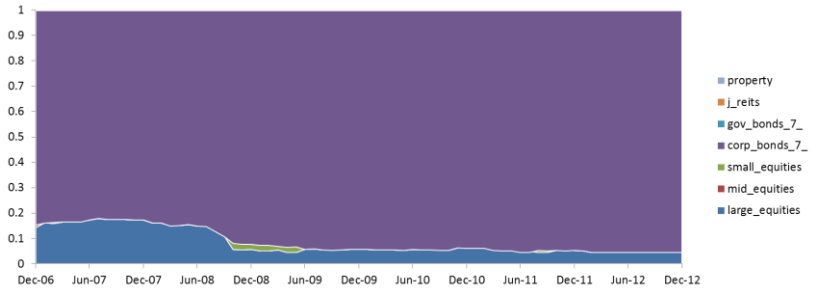
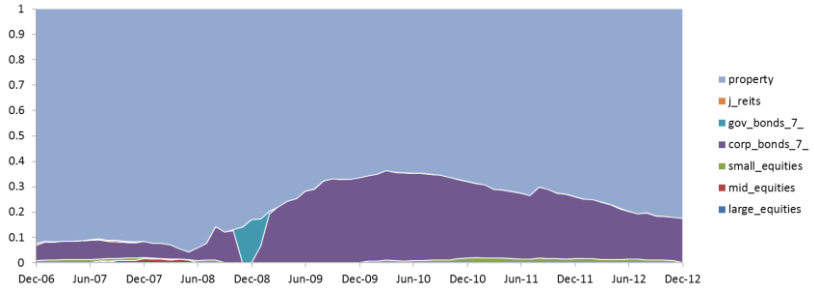


図 4.3.3.5　リスク回避係数小(θ5)

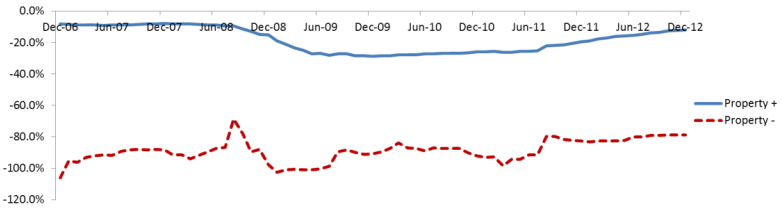
資産配分比の時系列変化：不動産を含まない場合



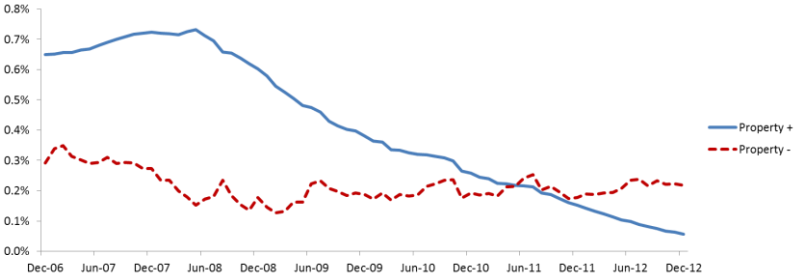
資産配分比の時系列変化：不動産を含む場合



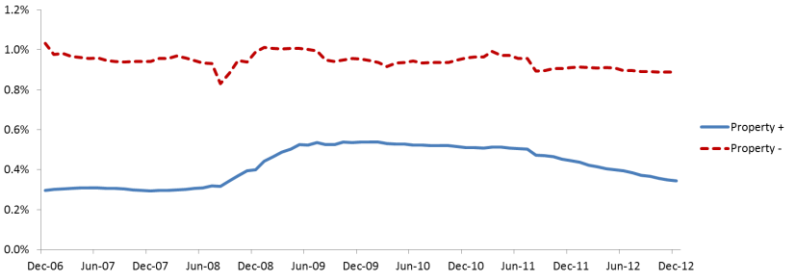
リスク調整後リターンの時系列変化



平均リターンの時系列変化



分散の時系列変化


1.2%
1.0%
0.8%
0.6%
0.4%
0.2%
0.0%
Dec-06
Jun-07
Dec-07
Jun-08
Dec-08
Jun-09
Dec-09
Jun-10
Dec-10
Jun-11
Dec-11
Jun-12
Dec-12
Property +
Property -

5　不動産の非流動性を考慮した長期多段階ポートフォリオ選択の方法

第４章では，一期間平均分散モデルによる不動産を含むポートフォリオ選択を，本章での分析の比較対象として整理した。得られた知見は先行研究とも一致する。しかし，第４章はあくまで本章との比較分析のためにおこなったものであり，本研究の関心である非流動性を考慮していない。また，一期間モデルは投資家のダイナミックなポートフォリオのリバランスを見ることができない。これではポートフォリオ選択における「いつ不動産を取得し手放すべきか」という重要な質問に答えることができない。

本章では不動産の非流動性がポートフォリオ選択に与える影響をみるために，これまでに得られた知見を基礎として，ポートフォリオモデルの構築を図る。具体的には，非流動性を考慮した長期複数資産ポートフォリオの構築のための動学的最適化モデルを「複数期間・多段階意思決定モデル」として定式化しその有用性を確かめる。理論的知見と実証的知見を得たうえで，非流動性と複数期間運用を想定した場合としなかった場合で，いかなる差異が見えてくるのかを探求する。

5.1　先行研究における不動産の非流動性の取り扱い

モデル化を図る前に，まずは先行研究での非流動性の取扱いを再度見てみよう。第 1 章にて Cheng *et al.*(2013)の研究にて提案された非流動性の取り扱いについて議論した。これは「リターンの Non-i.i.d.特性」，「取引費用の大きさ」，「市場滞留時間（TOM: time on market）」という 3 点に注目しており，論点は次のように要約できる。

「Non-i.i.d.特性」のため不動産のリターンの分散は保有期間の 2 乗に比例して大きくなる。流動性資産のリターンの分散が保有期間に比例するのと対照的である。よって，従来の研究が想定していた以上に不動産保有の収益リスクは大きく，ポートフォリオにおける不動産のウェイトは低いはずである。長期保有の阻害要因である。

「取引費用の大きさ」は，短期間に頻度高く不動産を売買することを極度に不利にする。よって不動産はどうしてもある一定期間以上は保有せざるを得ない。一方保有期間が長くなれば取引費用の大きさが収益全体に占める影響は小さくなる。短期保有の阻害要因である。

「市場滞留時間（TOM）」は非流動性そのものといえ，ポートフォリオのリバランスを困難にさせる。TOM の平均と分散は，従来の収益リスクの背景にある要因とは異なる 2 つの新たなリスク要因である。その影響は，リスク調整済みリターンの定式化の中で非流動性プレミアムとして計量することができる。

不動産と流動性資産とからなる長期ポートフォリオを組むとき，全体のリスク調整済みリターンを最大化するように不動産の最適保有期間を決定できる。取引費用と TOM は保有期間を長くする方向に作用し，一方 Non-i.i.d. 特性は保有期間を短くする方向に作用する。両者の作用が均衡する点で最適保有期間が決まるものである。

しかし，彼らの研究は，投資家が知りたい質問に答えているだろうか。彼らのモデルでは，

Non-i.i.d. 特性が最適保有期間を決定する上で支配的な役割を果たしている。しかしその論理だけだと，相当の長期にわたって不動産を保有する合理性はもはやないことが自明となる。これは妥当だろうか。仮に Non-i.i.d. 特性が顕著でない場合であっても，不動産と流動性資産のそれぞれのリターンの期待値と分散が変化するという予見の下では自ずとリバランスの動機が生ずる。リバランス時に不動産を売却するとすれば，その時点が最適保有期間の終わりである。しかし実際には，取引費用と TOM の存在によりそれに即応できないという非流動性リスクがある。つまり，彼らの研究では，各資産リターンのダイナミクスの下で，非流動性を考慮していかにしてポートフォリオを組めばよいかという課題はまだ残されている。

解決策として，多段階意思決定モデルの導入があげられる。彼らが用いたポートフォリオ分析モデルは「複数期間・1 段階意思決定モデル」であったが，上に挙げた課題を扱うには，資産保有を切り替える最適時期を決定することのできるより適切なモデルが必要である。

5.2　不動産の非流動性を考慮した 2 資産モデルの概要

5.2.1 モデルの目的と問題設定

ここでは非流動性資産としての不動産と他の流動性資産とからなる長期のポートフォリオを組むための動学的最適化モデルの構築を考える。モデルの目的は，大きく３つある。まず①投資家が将来時点においていつどれだけの不動産を取得し，いつまで不動産を保有し，いつどれだけの不動産を売却すればよいか，といった問題に答えることで，投資家の長期ポートフォリオ選択における不動産への投資戦略の立案に資する手段を提供することにある。次に，②上に挙げた先行研究が残した課題である不動産と流動性資産との保有の切り替えのダイナミクスを多段意思決定の下で考えることでもある。そして③それを利用して，長期ポートフォリオ選択における非流動性下での不動産保有の意義を評価し考察することである。

モデルを構築するに当たっての問題設定と前提条件は次のとおりである。

1 つの不動産資産と 1 つの流動性資産との，2 資産の長期ポートフォリオ選択の問題を考えるものとする。現実には多数の流動性資産があるが，不動産の一定量を一定期間保有したとすると，その期間の間は複数の流動性資産についてだけ通常のポートフォリオ選択の問題として考えればよい。そこで得られる最適ポートフォリオを 1 つの流動性資産とみなせば，ここで扱う 2 資産モデルと類似した状況設定になる。無論厳密には同等ではないので，多数の流動性資産とさらに無リスク資産を加えた場合の問題を独自に考えるべきである。ただそのことは多次元の動学的最適化を扱うことになり格段に煩瑣になるので残された課題としたい。

将来の投資環境，つまりそれぞれの原資産の対数リターンとその分散の毎期の将来時系列について，投資家は事前に見通しを持っているとする。すなわち何らかの方法で予測情報を持っているとする。

長期ポートフォリオ選択を考える期間を T 期間とする。投資家は保有資産に関するべき型効用関数を持ち，将来の投資環境の予測の下で，最終期 $T+1$ の期首においてその期待効用を最大化させるべく 2 資産の間での長期ポートフォリオ選択のダイナミクスを考えるものとする。通常の平均･分散モデルを長期の問題に適用しようとすると，それだけでは目的関数の定式化が恣意的なものになりやすい。ここでは期待効用の理論と整合する形で目的関数のプラクティカルな定

式化を導出する。

モデル化においては, 不動産の非流動性要因として先行研究が大きく取り挙げている要因のうち，取引費用と市場滞留時間に焦点を当てる。まずは取引費用を中心として扱い，その後市場滞留時間問題へと拡張していく。

不動産資産のリターンの Non-i.i.d.特性はモデル化の際には考慮しない。第２章と第３章で議論してきたとおり，不動産が単独で暴走するとは考えづらい。これをモデルに取り込むことは不動産の保有期間をモデル化の段階で限定することになり, 不動産の長期保有という解をあらかじめ排除することになりかねず適切ではない。つまり，モデル化の問題ではなく，データの問題として取り扱う。

5.2.2 モデルの概要

あらかじめモデルの概要を表 5.2 に示す。以下それに沿って概要を述べていく。議論を要する個所の詳細は次節以降で記述していく。

目的関数の定式化：加法分離型効用への変換と取引費用の影響

投資家は最終期 $T+1$ の期首において保有資産の総額Wによる期待効用を最大化するとする。べき型効用関数を仮定して期待効用最大化問題として定式化すると(5.2.1)式になる。ポートフォリオ全体のリターンが対数正規分布に従うと仮定すると，(5.2.1)式の問題は

$$\sum_{t=1}^{T}\left(m_t-\frac{\gamma-1}{2}{\sigma_t}^2\right)\rightarrow\max_{x_t,} \tag{5.2.2.1}$$

m_t，${\sigma_t}^2$ は，ポートフォリオリターンの期待値と分散である。

を解くことと同値の問題になる。これが加法分離型効用の原型になる。

モデルの操作性が増すのでこの形に変換したいが, 問題は「ポートフォリオリターンをどうやって原資産のリターンで表せばよいか」という点である。そこで，Campbell and Viceira（2002）がやったように伊藤の公式を応用して, ポートフォリオリターンを原資産リターンで近似する式を導いた。これが(5.2.2)式である。(5.2.2)式の $u_t(Z_t,x_t)$ は t 期の効用を表している。式の形からすればリスク調整済みリターンである。これは最終的に，不動産ストック Z_t（実物量）と不動産投資 x_t（または売却）との関数になる。

取引費用の影響は，毎期の効用 $u_t(Z_t,x_t)$ に次のようにして組み込むことができる。いま t 期首に総資産がW_tだとする。期首にx_t単位の不動産を取得または売却して取引費用Cが発生するとする（ (5.2.8)式，(5.2.9)式 ）。これは期首に収益「$-C$」が発生することに等しい。これを総資産W_tの下での対数リターンとして表すと(5.2.12)式になる。この直後の総資産はW_t-C になっている。ここからx_t単位の不動産を取得または売却して当期内に総資産を運用して収益（対数リターン$\boldsymbol{r}_t$）を上げるとする。これらを合計して定式化したものが(5.2.2)式になる。

操作変数としての不動産投資，状態変数としての不動産ストックと流動性資産

最大化を図るための操作変数は, 通常のポートフォリオ選択問題が扱う資産配分比率そのものではなく，不動産投資量 x_t（実物量）である。つまり，不動産保有量 Z_t（実物量，以下では不

動産ストックと称する）が不変であっても個々の原資産のリターンが変われば貨幣単位でみた個々の原資産への配分比率が変わりポートフォリオが変わってくる。つまり資産額ベースでみた配分比率を直接に操作できるわけではない。不動産については，実物量でみた投資量によって最終的に保有資産額を操作することになるからである。よって資産配分比率は不動産投資によって決まる状態変数の扱いである(5.2.11)式。なお，$x_t < 0$ の場合には，不動産の売却を意味するものとする。不動産資産の状態方程式とそれに関連する方程式は(5.2.4)，(5.2.5)，(5.2.6)式に表されている。

流動性資産の状態方程式は(5.2.7)式に表されている。(5.2.7)式の中の C は，不動産投資を行う場合にはその取得額と取引費用のために流動性資産が使用され減少することを意味している。不動産が売却される場合には売却額相当分（ただし取引費用を除く）が流動性資産に切り替わって増加することになる。

取引費用の定式化

非流動性要因としての取引費用を入れて定式化したのが(5.2.8)，(5.2.9)式である。すなわちリバランスを行おうとすると取引費用がかかるので, 毎期ごとに即時的なリバランスはできないことになり，ある期間不動産を保有してから，最適な時期にリバランスを行うことになる。(5.2.8)式は，不動産を$x_t(>0)$単位取得するときの費用Cを表す。不動産の購入額は$x_t P_t$である。このときその一定割合α_1の取引費用$\alpha_1 x_t P_t$と固定的な取引費用α_0が発生するとする。(5.2.9)式は，不動産を$-x_t(>0)$単位売却するときの収入Cを表す。不動産の売却による収入額は$-x_t P_t$である。このときその一定割合β_1の取引費用$\beta_1(-x_t)P_t$と固定的な取引費用β_0が発生するとする。不動産の取得も売却もなければ収入も費用も発生しない(5.2.10)式。

不動産の取得と売却の取引費用のうち取引額に比例的な取引費用$\alpha_1 x_t P_t$および$\beta_1(-x_t)P_t$は，不動産投資量または売却量x_tの操作によって変更できるものである。ところが固定費としてのα_0とβ_0とは実物投資量x_tの操作によって変更できるものではなく取引頻度によって決まるという特徴を持っている。不動産の非流動性を決定する取引費用要因のうちこの固定費用要因は特に重要な作用を持っていると考えられる。なぜなら，極めて短期の不動産売買を継続して繰り返すとそれだけで累積的に大きな費用が発生する可能性があるからである。しかもそれは売買の実物量x_tの大小にかかわらず発生するものである。よってこれは，頻繁な取引を抑制する方向に作用する非流動性要因の 1 つであると考えられる。常に大規模な不動産の売買（1 棟単位でのオフィスビルの売買）を行う投資家であれば資産総額に占めるこの固定費の割合は小さいかもしれない。しかし小規模な売買（1 戸単位の住宅の売買）を繰り返す投資家であれば，この費用は無視できないものであろう。

表 5.2　不動産と流動性資産からなる 2 資産長期ポートフォリオモデル

期待効用最大化

$$E[\,u(W_{T+1})\,] = E\left[\frac{W_{T+1}^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}\right] \rightarrow \max_{x_t} \quad (t = 1,2,\cdots T) \tag{5.2.1}$$

W：資産総額（初期値$W_0 = 100$とする）

γ：リスク回避度（$\gamma > 1$）

加法分離型効用尺度による上と同値の最大化問題

$$\sum_{t=1}^{T} u_t(Z_t, x_t) = \sum_{t=1}^{T}\left(\boldsymbol{w}_t{}'E[\boldsymbol{r}_t] + \frac{1}{2}\boldsymbol{w}_t{}'\boldsymbol{s}_t - \frac{\gamma}{2}\boldsymbol{w}_t{}'V_t\boldsymbol{w}_t + m_{C,t}\right) \rightarrow \max_{x_t} \tag{5.2.2}$$

$u_t(Z_t, x_t)$：t 期の効用。

$\boldsymbol{w}$：ウェイトベクトル(5.2.9)式

$\boldsymbol{r}$：原資産の対数リターンベクトル

$r_R = \log(1+q_R)$，$r_L = \log(1+q_L)$ を成分とする

V：分散共分散行列

$\boldsymbol{s}$：原資産の分散ベクトル

$m_{C,t}$：取引費用による資産減少の対数リターン換算値（< 0），(5.2.12)式

総資産W

$$W_{t+1} = W_{R,t+1} + W_{L,t+1} \tag{5.2.3}$$

不動産資産W_R，不動産ストックZ，不動産投資量x，不動産価格P

$$W_{R,t+1} = Z_{t+1}P_{t+1} \tag{5.2.4}$$

$$Z_{t+1} = Z_t + x_t \tag{5.2.5}$$

$$P_{t+1} = P_t(1+q_{R,t}) \qquad q_R：\text{不動産の総合収益率} \tag{5.2.6}$$

流動性資産W_L

$$W_{L,t+1} = (W_{L,t} - x_tP_t - C)(1+q_{L,t}) \qquad q_L：\text{流動性資産の総合収益率} \tag{5.2.7}$$

不動産投資額・売却額

$$x_tP_t \begin{cases} > 0 \cdots \text{投資額} \\ < 0 \cdots \text{売却額} \end{cases} \tag{5.2.8a}$$

取引費用C

$$C = \begin{cases} \alpha_1 x_t P_t + \alpha_0 & \text{：不動産投資のとき}(x_t > 0) \quad (5.2.8) \\ \beta_1(-x_t)P_t + \beta_0 & \text{：不動産売却のとき}\ (x_t < 0) \quad (5.2.9) \\ 0 & \text{：投資・売却なし}\ (x_t = 0) \quad (5.2.10) \end{cases}$$

不動産資産配分比率w_R，流動性資産配分比率w_L

$$w_{R,t} = \frac{W_{R,t} + x_tP_t}{W_t - C},\quad w_{L,t} = \frac{W_{L,t} - x_tP_t - C}{W_t - C} \tag{5.2.11}$$

取引費用による資産減少の対数リターン換算値

$$m_{C,t} = \log\left(1 - \frac{C}{W_t}\right) < 0 \tag{5.2.12}$$

資産配分比率（ポートフォリオ配分比率）

不動産資産と流動性資産とへの貨幣額ベースでの配分比率 $w_{R,t}$，$w_{L,t}$，つまりポートフォリオ配分比率は(5.2.11)式のようになる。不動産投資または売却があったときの直後の総資産は$W_t - C$である。なければ$C = 0$ だからW_tである。

5.3　投資家の期待効用（目的関数）の加法分離型効用への変換

5.3.1 長期ポートフォリオリターンの加法分離型への変換

投資家の効用関数としてべき型効用関数を仮定し

$$u(W_{T+1}) = \frac{W_{T+1}^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} \tag{5.3.1.1}$$

とする。W_{T+1}は$T+1$期の期首のポートフォリオの総資産額である。γはリスク回避度で$\gamma > 1$である。ポートフォリオの総合収益をRとしこの$t+1$期とt期との比R_{t+1}/R_tをt期のポートフォリオリターンと呼び$1+q_t$と表すことにする。いま初期の資産が 1 のとき$T+1$期の期首の資産W_{T+1}は，1 期，2 期，$\cdots$，T期のポートフォリオリターンの積として

$$W_{T+1} = (1+q_1)(1+q_2)\cdots(1+q_T) \tag{5.3.1.2}$$

と表すことができる。$1+q_t(=y_t$とおく$)$が対数正規分布に従い，その確率密度関数を

$$g(y_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t y_t} exp\left(-\frac{(\log y_t - m_t)^2}{2{\sigma_t}^2}\right) \tag{5.3.1.3}$$

とする。これを

$$y_t \sim LN(m_t, {\sigma_t}^2) \tag{5.3.1.4}$$

と表すことにする。すると対数正規分布の積に関する再生性によりW_{T+1}は

$$W_{T+1} \sim LN\left(\sum_{t=1}^{T} m_t, \sum_{t=1}^{T} {\sigma_t}^2\right) \tag{5.3.1.5}$$

と表される。ただし$1+q_t$は相互に独立であると仮定する。

これをもとに，(5.2.1)式の最大化問題は次のように展開できる。

$$E\left[\frac{W_{T+1}^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma}\right] = \frac{1}{1-\gamma}\left\{exp\left(\tilde{m}(1-\gamma) + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2(1-\gamma)^2\right) - 1\right\} \rightarrow \max_{x_t,} \tag{5.3.1.6}$$

ただし

$$\tilde{m} = \sum_{t=1}^{T} m_t, \quad \tilde{\sigma}^2 = \sum_{t=1}^{T} {\sigma_t}^2$$

よって最終的にこの最大化問題は，次の最大化問題と同値になる。

$$\tilde{m} - \frac{\gamma - 1}{2}\tilde{\sigma}^2 \rightarrow \max_{x_t,} \tag{5.3.1.7}$$

ここで，γはリスク回避度を表し，投資家はリスク回避型（$\gamma > 1$）だとする。

この式が表すのは，正確には当初の期待効用そのものではないが，その代りを果たす等価な効用尺度である。第 1 項のリターンの期待値を，第 2 項のリスクプレミアムで調整していると解釈で

きるので，これをリスク調整済みリターンともいう。

改めてこの式をuとおき，ポートフォリオの対数リターン$\log(1+q_t) \to r_{P,t}$, $m_t \to E[r_{P,t}]$, ${\sigma_t}^2 \to Var[r_{P,t}]$と書き改める。添字$p$はポートフォリオを表す。すると，次の加法分離型効用関数が得られる。

$$u = \sum_{t=1}^{T} \left(E[r_{P,t}] - \frac{\gamma - 1}{2} Var[r_{P,t}] \right) \tag{5.3.1.8}$$

5.3.2 原資産リターンによるポートフォリオリターンの近似

ポートフォリオのリターンは，原資産のリターンの加重平均である。しかし，原資産のリターンが対数正規分布に従うと仮定した場合，その加重平均に再生性はないためポートフォリオのリターンの確率密度関数を原資産のリターンの確率密度関数に基づいて明示的に求めることは困難である。前節ではポートフォリオリターンが対数正規分布に従うことを仮定して加法分離型効用関数を導いたが，このままでは論理的に整合しないことになる。そこで，ポートフォリオの対数リターン$r_{P,t}$を，原資産の対数リターンで近似することを考える。これは，Campbell and Viceira（2002）が提示した方法を援用したものである。彼らの方法も元々は，連続時間の確率過程における伊藤の公式の考え方を離散時間にも応用したものである。詳細は以下のとおりである。

原資産の価格を$X_{i,t}$，収益率を$q_{i,t}$，対数リターンを$r_{i,t}$とする。

$$r_{i,t} = \log(1+q_{i,t}) = \log\left(\frac{X_{i,t+1}}{X_{i,t}}\right) = \log X_{i,t+1} - \log X_{i,t} \tag{5.3.2.1}$$

ポートフォリオの収益率を$q_{P,t}$，対数リターンを$r_{P,t}$，ウェイトをw_iとする。以下，時間の添え字tを略する。

$$r_P = \log(1+q_P) = \log\left(\sum_i w_i(1+q_i)\right) = \log\left(\sum_i w_i e^{r_i}\right) \quad (= f(\boldsymbol{r})\text{とおく}) \tag{5.3.2.2}$$

ここで，$\boldsymbol{r}' = (r_1, r_2, \cdots, r_n)$は原資産の対数リターンベクトルである。

$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$のまわりで Taylor 展開して 2 次の近似式を求める。

$$\begin{aligned} r_P = f(\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{0}) &+ \left(r_1 \frac{\partial}{\partial r_1} + \cdots + r_n \frac{\partial}{\partial r_n} \right) f(\boldsymbol{0}) \\ &+ \frac{1}{2}\left(r_1 \frac{\partial}{\partial r_1} + \cdots + r_n \frac{\partial}{\partial r_n} \right)^2 f(\boldsymbol{0}) \\ &+ o(|\boldsymbol{r}|^2) \end{aligned} \tag{5.3.2.3}$$

ここで主な個所を計算して

$$f(\mathbf{0}) = \log\left(\sum_i w_i e^0\right) = 0 \tag{5.3.2.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial r_i} f(\mathbf{0}) = \left.\frac{w_i e^{r_i}}{\sum_k w_k e^{r_k}}\right|_{r_i=r_k=0} = w_i \tag{5.3.2.5}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial {r_i}^2} f(\mathbf{0}) = \left.\frac{w_i e^{r_i}(\sum_k w_k e^{r_k}) - (w_i e^{r_i})^2}{(\sum_k w_k e^{r_k})^2}\right|_{r_i=r_k=0} = w_i - {w_i}^2 \tag{5.3.2.6}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} f(\mathbf{0}) = \left.\frac{-w_i e^{r_i} w_j e^{r_j}}{(\sum_k w_k e^{r_k})^2}\right|_{r_i=r_j=r_k=0} = -w_i w_j \tag{5.3.2.7}$$

だから，近似式は

$$r_P = \boldsymbol{w}'\boldsymbol{r} + \frac{1}{2}\boldsymbol{r}' diag(\boldsymbol{w})\boldsymbol{r} - \frac{1}{2}\boldsymbol{w}'\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}'\boldsymbol{w} \tag{5.3.2.8}$$

となる。

さらに，積$r_i r_j$を短い時間間隔の下での微小量と考えて次のように評価する。原資産X_iが幾何ブラウン過程 $dX_i = m_i X_i dt + \sigma_i X_i dB_i$ にしたがうとすれば（B_i は標準ブラウン運動にしたがうとする）

$$r_i = d(\log X_i) = \left(m_i - \frac{1}{2}{\sigma_i}^2\right)dt + \sigma_i dB_i \tag{5.3.2.9}$$

だから，$dt = 1$とみなして

$${r_i}^2 = {\sigma_i}^2 (dB_i)^2 = {\sigma_i}^2\, dt = {\sigma_i}^2 \tag{5.3.2.10}$$

$$r_i r_j = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} dt = \sigma_{ij} dt = \sigma_{ij} \tag{5.3.2.11}$$

である。よって先の近似式は次のようになる。

$$r_P = \boldsymbol{w}'\boldsymbol{r} + \frac{1}{2}\boldsymbol{w}'\boldsymbol{s} - \frac{1}{2}\boldsymbol{w}' V \boldsymbol{w} \tag{5.3.2.12}$$

ここで，$\boldsymbol{s}' = ({\sigma_1}^2, {\sigma_2}^2, \cdots, {\sigma_n}^2)$。$V = \left(\sigma_{ij}\right)$ $n \times n$の分散共分散行列。$\sigma_{ii} = {\sigma_i}^2$。

これを先の加法分離型効用の(5.3.1.8)式に代入すれば，原資産リターンで表示した次の加法分離型効用が得られる。

$$u = \sum_{t=1}^{T}\left(\boldsymbol{w}_t{}' E[\boldsymbol{r}_t] + \frac{1}{2}\boldsymbol{w}_t{}'\boldsymbol{s}_t - \frac{\gamma}{2}\boldsymbol{w}_t{}' V_t \boldsymbol{w}_t\right) \tag{5.3.2.13}$$

これが当初の最大化問題(5.2.1)式に代わる実際の目的関数(5.2.2)式である。

5.4　Non-i.i.d.過程の取り扱い

先にモデル化の前提条件の個所でも述べたように，このモデルでは先行研究が指摘した不動産のリターンの Non-i.i.d.過程をモデル化していない。同特性は，あくまでデータの問題でありモデル化の問題ではないと考える。Cheng *et al.*(2013)は Non-i.i.d.過程に支配的な役割を与えたが，第３章で示された通り，不動産だけが独立した動きをするとは考えづらく，モデル化することは適切ではないと考える。それよりは，データそのものが持つ特性として捉えて分析を行うことが望ましい。そこで，ここではいかにして Non-i.i.d.過程をデータに取り込んでいくのかを考察してい

く。

これまでの分析で，Non-i.i.d.特性は単位根過程である可能性を指摘してきた。日本においては単位根の存在が確認された。これは，投資家の予測誤差が時間とともに増大していく特性ともいえる。この事象を本分析に組み入れるとすると，意図的にデータを加工することで対応することが可能である。具体的には，経年とともに予測誤差が増大していく予測データを用いて，本分析に組み入れることである。例えば，第 3 章において，多変量時系列モデルを用いて構築した VECM のようなモデルを用いることができる。同モデルの主とした目的は，予測誤差を不動産以外の資産クラスをもって説明することであった。しかしもちろん，同モデルは予測モデルとしても機能することも可能である。そこで同時系列モデルを用いて，予測データを生成し，不動産データとして本章の多段階意思決定モデルを適用することにより Non-i.i.d.特性をポートフォリオ分析に反映させることができる。

しかし，この手法の現時点での採用は適切ではないため行わないこととした。その理由は，まず①不動産のみならず他の資産クラスも，投資家は動向を予測しながら投資を行っているものであり，不動産のみに予測モデルを適用することは公平ではない。予測モデルでは常に誤差はつきものであるからして，不動産のみに予測モデルを適用し，誤差を持たせることは不適切である。次に②同時系列モデルは，このような予測を行うことを意図して構築されたものではなく，予測モデルとしては，さらなる精緻化が必要である。ここでいう精緻化とは，分散予測を行う必要があることをいう。期待リターンであれば同 VECM を用いての分析でも耐えうるものであるが，予測誤差はさらなる分析モデル（例えば多変量 GARCH）の構築を必要とする。

まとめると，この Non-i.i.d 問題は，ポートフォリオ選択モデルの問題ではなく，そこにインプットされるリターンとリスクの将来想定のデータの問題である。つまり動学的最適化問題とは切り離して考えたほうが良い。望ましくは，VECM モデルや多変量 GARCH モデルなどにより将来のリターンとリスクを予測することができればよい。本論文では精緻化するまでに至っていないので，さらに深い確率過程の考察が必要である。本研究ではそうした課題を見出したところまでで区切りをつけることにし，残された課題としている。

5.5　動的計画法によるモデルの解法

さて，さっそく動的計画法を用いて 2 資産モデルを解くことにする。解としては，最適政策の下での不動産ストック $\{Z_t\}$（実物量）と非流動性資産 $\{W_{L,t}\}$ の時系列が得られればよい。2 次元の動的計画法のようだが，両者には

$$\text{総資産 } W_t = Z_t P_t + W_{L,t} \qquad (P_t \text{ は不動産価格，与件}) \tag{5.5.1}$$

の関係があり（表 5.2 の(5.2.3)式，(5.2.4)式より），総資産の初期値 W_0 を与件として問題を解くので $\{Z_t\}$ が求められればもう一方の $\{W_{L,t}\}$ も求まる。よって実質的には 1 次元の動的計画法である。ここでは次元が小さいので格子法を用いて解くことにする（鍋島，1968[1]）。

アルゴリズムの概要を表 5.5 に示す。以下説明を補足するが行頭の数字は，表 5.5 の行頭の番号に同じである。

[1]鍋島一郎（1968），動的計画法数学ライブラリー7，森北出版，pp.73-75

1

- 2 資産の対数リターンの将来の期待値，分散，共分散をセットする。
- その他，投資家のリスク回避度，総資産の初期値，などをセットする。
- 不動産ストック，非流動性資産の初期値は定めない。自由端扱いである。

2～3

- 与件としての各資産の対数リターンをもとに，総資産，不動産ストック，流動性資産のそれぞれについて運用期間（1 期～$T+1$期まで）の間の最大値と最小値を想定しておく。
- 不動産ストックと流動性資産について，それぞれ想定される最大値を M 分割して格子をセットする。以後この格子点の空間に解が求められる。

4～5

- 最終期 $T+1$ 期において，不動産ストックと流動性資産との解の組 $(Z_i, W_{L,i})$ がとり得る格子点の集合を実現可能状態集合 $\boldsymbol{F}(T+1)$ としてセットする。具体的には，総資産の想定の最小値と最大値の間にくる組合せをすべて列挙して記憶しておく。自由端扱いである。

$$\boldsymbol{F}(T+1) = \left\{ \left(Z_i, W_{L,i}\right) \mid \widehat{W}_{min,\ T+1} \leqq Z_i P_{T+1} + W_{L,i} \leqq \widehat{W}_{max,\ T+1} \right\} \quad i = 1,2,\cdots,N_{T+1} \qquad (5.5.2)$$

- t 期に状態 Z_t にあるところから出発して以降最適な政策をとって最終期 $T+1$ に至るまでの効用 $u_t(Z_t, x_t)$ の合計を最大化したものを $U_t(Z_t)$ と表す。これを状態評価関数と呼ぶ。最適性原理によりベルマン方程式

$$U_t(Z_t) = max[\, u_t(Z_t, x_t) + U_{t+1}(Z_{t+1}) \,] \qquad (5.5.3)$$

が得られる。ここで，最終期についてはすべての$\boldsymbol{Z}_{T+1} = \{Z_i\}$について

$$U_{T+1}(\boldsymbol{Z}_{T+1}) = 0 \qquad (5.5.4)$$

と設定しておく。

6～23

- 最終期 T 期から初期へ向けて後ろ向き帰納法で毎期ごとに状態評価関数 $U_t(Z_t)$ を解いていく。具体的には次のように問題を解く。
- t 期の 1 つの状態 Z_t をとりあげる。この状態 Z_t から次の$t+1$期に遷移する可能性のある状態 Z_{t+1} の候補は，実現可能状態集合$\boldsymbol{F}(t+1)$としてすでに求められている。
- 「1 つの状態 Z_t」と「多数の遷移候補Z_{t+1}のうちの 1 つ」との間で，ベルマン方程式（上記）の右辺を計算して 1 つの状態評価値 $U_t(Z_t)$ を求める。
- これを遷移候補のすべての Z_{t+1} について計算し，最大となる状態評価値 $U_t(Z_t)$ と遷移先 Z_{t+1} を，Z_t からの最適パス解として記憶する。
- 最適パス解 Z_{t+1} が見つかった状態 Z_t を，t 期の実現可能状態集合 $\boldsymbol{F}(t)$のメンバーに追加する。
- なお上の計算過程で必要となる諸変数の諸量は，表 5.2 のモデル式を用いて逆算する。

  不動産投資または売却： $x_t = Z_{t+1} - Z_t$　　(5.2.5)式

  不動産投資(売却)額＋取引費用： C　　(5.2.8)～(5.2.10)式

  流動性資産： $W_{L,t} = W_{L,t+1}/(1+q_{L,t}) - C$　　(5.2.7)式

  ここで，$0 \leqq W_{L,t} \leqq \widehat{W}_{max}$となれば，遷移候補$Z_{t+1}$は$Z_t$からの遷移が可能であると判定する。

  すべての遷移候補Z_{t+1} について Z_t からの遷移が不可能となれば，状態 Z_t が実現不可能と判定する。

表 5.5　動的計画法による 2 資産モデルの解法

・・・・ 初期設定と準備をする
- 将来の投資環境データをセットする
- 対数リターンの期待値時系列.....$\{m_{R,t}\}$, $\{m_{L,t}\}$
- 対数リターンの分散共分散時系列.....$\{\sigma_{R,t}^2\}$, $\{\sigma_{L,t}^2\}$, $\{\sigma_{RL,t}\}$

- 運用期間における資産の最大値を想定する
  - 総資産の最小値・最大値を想定 .....$\widehat{W}_{min}$, $\widehat{W}_{max}$
  - 不動産ストックの最大値を想定 .....$\hat{Z}_{max}$
  - 流動性資産の最大値を想定.....$\widehat{W}_{max}$
- 格子をセットする
  - 不動産ストック変量の分割 .....$\Delta_R = \hat{Z}_{max}/M$, $\boldsymbol{Z} = \{Z_k \mid Z_k = k\Delta_R,\ k = 0,1,2,\cdots,M\}$
  - 流動性資産変量の分割 .....$\Delta_L = \widehat{W}_{max}/M$, $\boldsymbol{W_L} = \{W_{L,k} \mid W_{L,k} = k\Delta_L,\ k = 0,1,2,\cdots,M\}$

$T+1$期の実現可能状態集合$\boldsymbol{F}$をセットする:
- $\boldsymbol{F}(T+1) = \{ (Z_i, W_{L,i}) \mid \widehat{W}_{min} \leqq Z_i P_{T+1} + W_{L,i} \leqq \widehat{W}_{max} \}\ \ i = 1,2,\cdots,N_{T+1}$

$T+1$期の状態評価関数をセットする: $U_{T+1}(\boldsymbol{Z}_{T+1}) = 0$

・・・・ 後ろ向き帰納法で状態評価関数をセットする
$t = T,\ T-1,\ T-2,\ \cdots,\ 2,\ 1$ を繰り返す
- | 1 つの$Z_k \in \boldsymbol{Z}$を取り出す → Z_tとする　（$k = 0,1,2,\cdots,M$ を繰り返す）
  - | $\boldsymbol{F}(t+1)$から 1 組の$(Z_i, W_{L,i})$を取り出す → Z_{t+1}とする　（$i = 1,2,\cdots,N_{t+1}$ を繰り返す）
    - | $(t+1)$期の状態Z_{t+1}, t期の状態Z_tから不動産投資x_t, 流動性資産$W_{L,t}$を逆算する
      - | 実現可能ならば（流動性資産が適正な範囲であること）
        - | 資産配分ウェイトを計算: .....$w_{R,t}$, $w_{L,t}$
        - | リスク調整済みリターンを計算: .....$u_t(Z_t, x_t)$
        - | 状態評価関数を計算: .....$U_t(Z_t) = max[\, u_t(Z_t, x_t) + U_{t+1}(Z_{t+1})\,]$
        - | $U_t(Z_t)$がこれまでの値より大きいならば
          - | 新たな最大値として$U_t(Z_t)$を記憶
          - | t 期の実現可能状態集合$\boldsymbol{F}(t)$に$(Z_t, W_{L,t})$を追加して記憶
          - | 次に遷移すべき$(t+1)$期の資産状態$(Z_i, W_{L,i})$を記憶
        - | 終わり
      - | 終わり
    - | 終わり
  - | 終わり
- | t 期実現可能状態集合$\boldsymbol{F}(t)$ができる

終わり

・・・・ 初期から終期へ最適政策のパスをたどる
$\boldsymbol{F}(1)$の中から初期値を選択する: $(Z_1, W_{L,1})$

$t = 1,2,\cdots,T$ を繰り返す
- |　$(Z_{t+1}, W_{L,t+1})$を選択する，ただし$\{(Z_{t+1}, W_{L,t+1}) \mid U_t(Z_t) = max[u_t(Z_t, x_t) + U_{t+1}(Z_{t+1})]\}$

終わり

最適政策の系列$(Z_1, W_{L,1})$, $(Z_2, W_{L,2})$, …, $(Z_{T+1}, W_{L,T+1})$ができる

24～28

- 総資産の初期値 $W_0 \fallingdotseq Z_1 P_1 + W_{L,1}$ を一定の誤差範囲で満たす組合せ $(Z_1, W_{L,1})$ のうち状態評価値 $U_1(Z_1)$ を最大にするものを見つけて初期値とする。
- 最適パス解をたどって最適政策の系列$(Z_1, W_{L,1})$，$(Z_2, W_{L,2})$，…，$(Z_{T+1}, W_{L,T+1})$を求める。

5.6　数値データによる 2 資産ポートフォリオ選択の分析

5.6.1 仮想的な将来想定の下での分析

まず 2 資産の対数リターンの期待値と分散共分散についての仮想的な数値データを用いて動的計画法でポートフォリオ問題を解いてみよう。その目的は，第 1 に先に考案した動的計画法の解法のテストを行うこと，第 2 に流動性下と非流動性下でのポートフォリオ選択の違いがどのように表れるかを把握すること，第 3 にそれを通じて不動産保有のあり方について何か含意が得られる可能性があるか見定めることである。

5.6.2 設定データの内容とねらい

設定した将来データは次のような内容である（図 5.6.2.1）。

① 向こう 20 期にわたる将来データである。

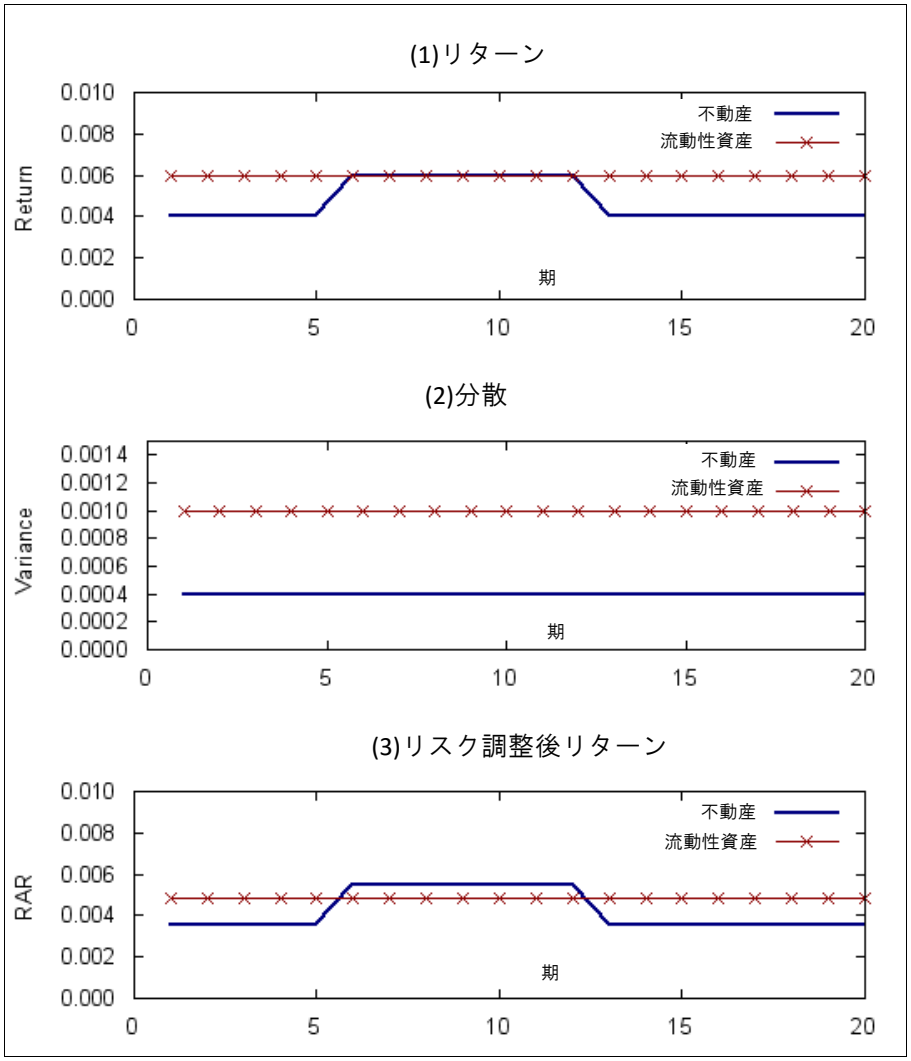
② 流動性資産の対数リターンの期待値は 0.006 で全期間一定である。また分散は 0.0010 で全期間一定である。

③ 不動産の対数リターンの期待値は，始めの 5 期間が 0.004 で一定，次の 7 期間が 0.006 で一定，さらに 8 期間が 0.004 で一定という 1 ステップの台形状の増減パターンをとる。一方，分散は 0.0004 で全期間一定である。

このデータのねらいは，不動産のリターンの台形状増減パターンに対し，取引費用の存在がどのような非流動性の特徴を現わすかを捉えることにある。取引費用は，「2 つの資産の間のリスク調整済みリターン（risk-adjusted-return: RAR）の差」と密接な関係がある。RAR の差が大きいと，取引費用がある程度大きくても資産保有の切り替え（リバランス）が生ずる。RAR の差が小さいと，取引費用がよほど小さくない限りリバランスは生じない。この関係については，次節の実データによる将来想定の個所で詳細に論ずる。

例えば，取引費用のうち固定費用の存在は，リターンの増大分（台形の高さ）が大きいほど，また増大期間（台形の水平長さ）が長いほど固定費の支払いを上回る収益が見込めるので，リターンの動きに順応する流動的な動きからそう大きく逸脱することなく不動産の投資と売却がなされると考えられる。一方，相対的に固定費が大きければ不動産投資はリターンの動きに反応しない結果になるだろう。

図 5.6.2.1　2 資産についての仮想的な将来データ



5.6.3 分析結果

全部で 3 ケースを行った。下の表 5.6.3.1 にそれぞれのケースの取引費用のパラメータの具体的な設定値を示した。併せて分析結果で得られた「不動産保有形態の解」の特徴を示した。すべてリスク回避度$\gamma = 3.4$（リスク許容が中間的な投資家）の下で行った。

ところで，パラメータの読み方については以下の通りである。固定費のパラメータは，投資ストック数をもとに計算されている。固定費パラメータが「1」と設定されている場合，100 のストックに対して 1 が失われる。例えば，全体で 100 億円の投資を行っている場合，1 億円が固定費として支出されることになる。他方，比例費については，取引量に対して特定のパーセンテージを乗じた値を費用として適用していくことになる。比例費パラメータが「0.01」と設定された場合，取引量の 1%が比例費として適用される。

表 5.6.3.1　仮想データにおける取引費用の設定ケースとシミュレーション結果

	取引費用のパラメータ				
	不動産取得時		不動産売却時		
	固定費	比例費	固定費	比例費	不動産保有形態の解
ケース No.	α_0	α_1	β_0	β_1	$\gamma = 3.4$
1	0	0.00	0	0	流動
2	0.05	0.0015	0.05	0.0015	準流動
3	0.05	0.002	0.05	0.002	一定保有

(注)　固定費と比例費は，表 5.2(5.2.8)式，(5.2.9)式のα_0，α_1，β_0，β_1に当たる。

後掲の図 5.6.3.1 には，それぞれのケースについて「不動産ストックの保有解（Stock）」(1)(2)(3)と「不動産資産へのポートフォリオ配分比率（Weight）」(4)(5)(6)とを示した。

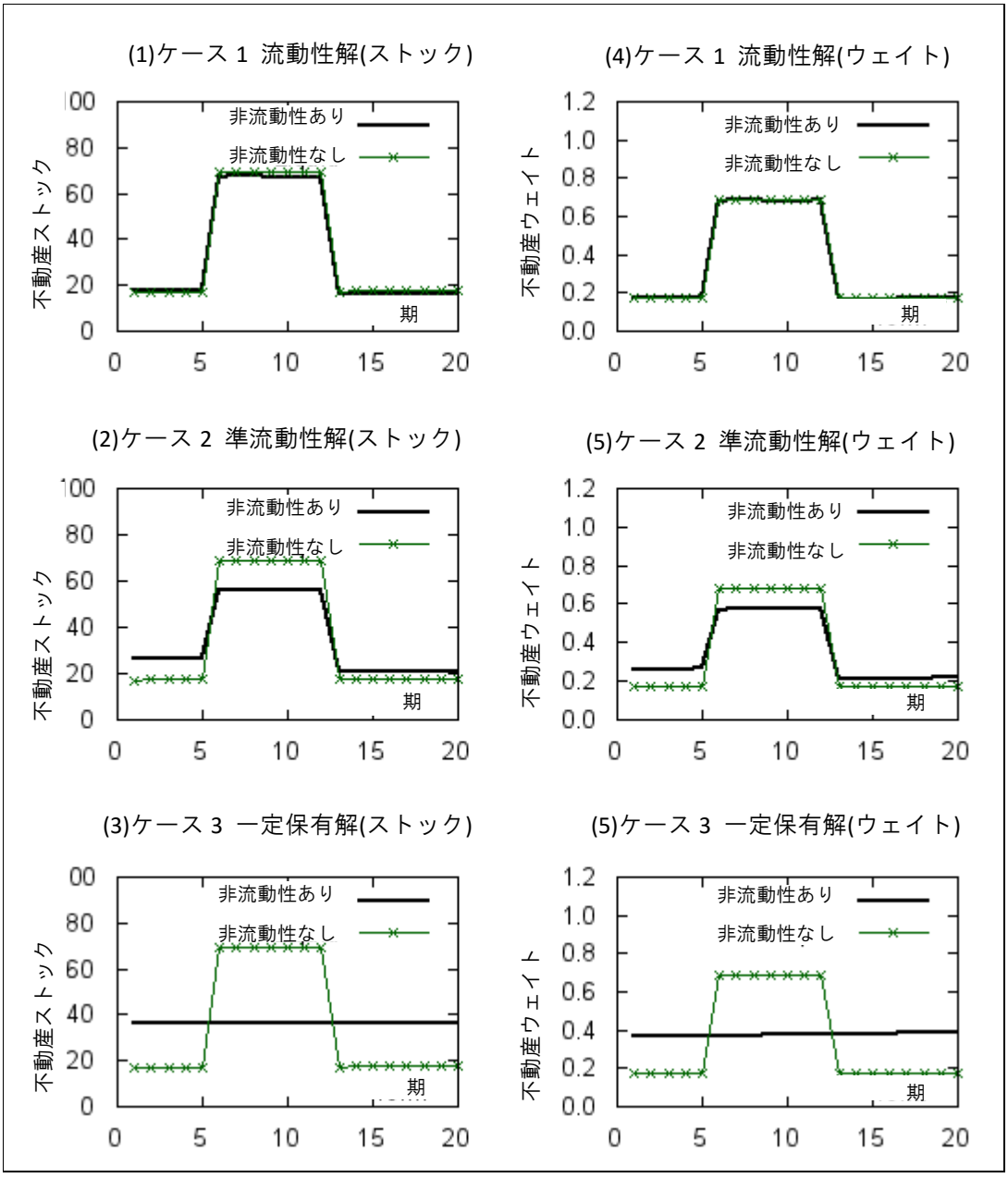
まずケース 1 の取引費用がない場合を見てみよう（図 5.6.3.1(1)(4)）。図 5.6.3.1(4)は，不動産へのポートフォリオ配分比率（Weight）のグラフである。「非流動性なし（つまり，流動性下）」とあるのは各期に平均分散モデルを解いて得られた不動産への投資配分比率を折れ線グラフにしたものである。一方，「非流動性あり」とあるのは動的計画法を用いて全期にわたって不動産の投資と売却の最適政策を解いて得られたものを描いている。これは本来，取引費用が存在すれば「流動性下」と「非流動性下」とで異なったグラフ形状を示すものである。しかしこの場合は取引費用がないので，論理的には同じ形状のグラフになるはずである。事実ほぼ同じ形状になっている。全く異なる方法で導いた結果であるにもかかわらずほとんど一致している。つまり動的計画法の解法の正しさがテストされたということでもある。図 5.6.3.1(1)の不動産ストック（Stock）の図も同様な見方である。ただし，「流動性下」のグラフは，平均分散モデルにより不動産へのポートフォリオ配分比率を求め，それをもとに不動産資産額を求め，それを不動産価格で除することで不動産ストックに直したものである。一方「非流動性下」は動的計画法で解いたものである。両者はほぼ一致している。

ケース 2 は，不動産の取得にも売却にも固定費と比例費がかかるとしたケースである。ただし比例費を小さめに設定したケースである（ 図 5.6.3.1(2)(5) ）。流動性解に近い解であるが，取引費用が発生した分だけ不動産の取得は小さくなっている。一方，特徴的なのは流動性解と比べて予め不動産保有比率を高くしておくことが最適であると示唆している点である。これを「準流動性解」と呼ぶことにする。

ケース 3 は，比例費をより大きく設定したケースである（ 図 5.6.3.1(3)(6) ）。上の解が示唆した「予めの保有」をさらに推し進めて，始めから不動産の保有を多くしてそのまま一定に保持することが最適政策であると告げている。不動産の取得と売却の取引費用の発生を避けているわけである。これは実に興味深い「非流動解」を示している。あたかも不動産の長期一定保有政策を暗示している。これを「一定保有解」と呼ぶことにする。

このように取引費用の設定の仕方によって，流動性解，準流動性解，一定保有解などバリエーションのある解が得られることがわかる。

図 5.6.3.1　2 資産ポートフォリオ分析の結果（仮設データによる）



(注)　”――”は動的計画法による非流動性考慮解。”–*–*–”は平均分散モデルによる解（非流動性考慮なし）。

5.7　実データを将来想定としたときの最適ポートフォリオ

次に実際の不動産と流動性資産の過去のデータを用いて, それがあたかも将来の想定であるとみなして長期のポートフォリオ問題を解いてみよう。その目的は, 仮想データとは異なってはるかにさまざまな変化のケースが含まれているであろう状況下で動的計画法の有効性を検証してみることにある。一方, 合目的的なデータの設定ではないので過去のデータが有している特性が濃厚な状況下での限定された分析になる。分析結果を解釈するにはそうした事情を念頭において

おかねばならない。

5.7.1 設定データの内容

使用した実際のデータと，設定した将来想定は次のような内容である。
原資産として次の 7 つを対象とした。大規模株式, 中規模株式, 小規模株式, 社債, 国債, J-REIT, 不動産である。

それぞれについて総合収益指数（2001 年 12 月～2012 年 12 月の月次データ, 133 期間データ）があり，それをもとに個々の原資産の総合収益率を求めたものがある（対数リターン，132 期間データ)。

本研究が扱う 2 資産のカテゴリーとの対応については, 上の不動産はそのまま本研究での不動産に対応する。また残りの 6 つの原資産が本研究での流動性資産に当たる。

まず不動産の 132 期間の対数リターンデータについて，1 期から 60 期までのデータを用いて平均と分散を求めた。次いで 1 期ずらして 2 期から 61 期までのデータを用いて同様にした。以下同じように，ウィンドウを 60 期として初期から末期まで 1 期ずつずらしながら平均と分散を求めた。こうして 73 期分の不動産の対数リターンの平均･分散を求めた。これをそのまま将来起こるものという想定とした。

残りの 6 つの流動性資産については，同じくウィンドウを 60 期として 132 期間全体について 1 期ずつウィンドウをずらす方法で個々にポートフォリオ分析を行った。つまり特定のリスク回避度を設定して 6 資産の平均分散モデル（ポートフォリオのリスク調整済みリターン）を最大化する問題を解いて，73 期それぞれの最適ポートフォリオのリターンの平均・分散の時系列を求めた。これを本研究における流動性資産の将来起こるデータとして想定した。なおこれらのデータとポートフォリオ分析は，第 4 章で扱っているものと同じである。

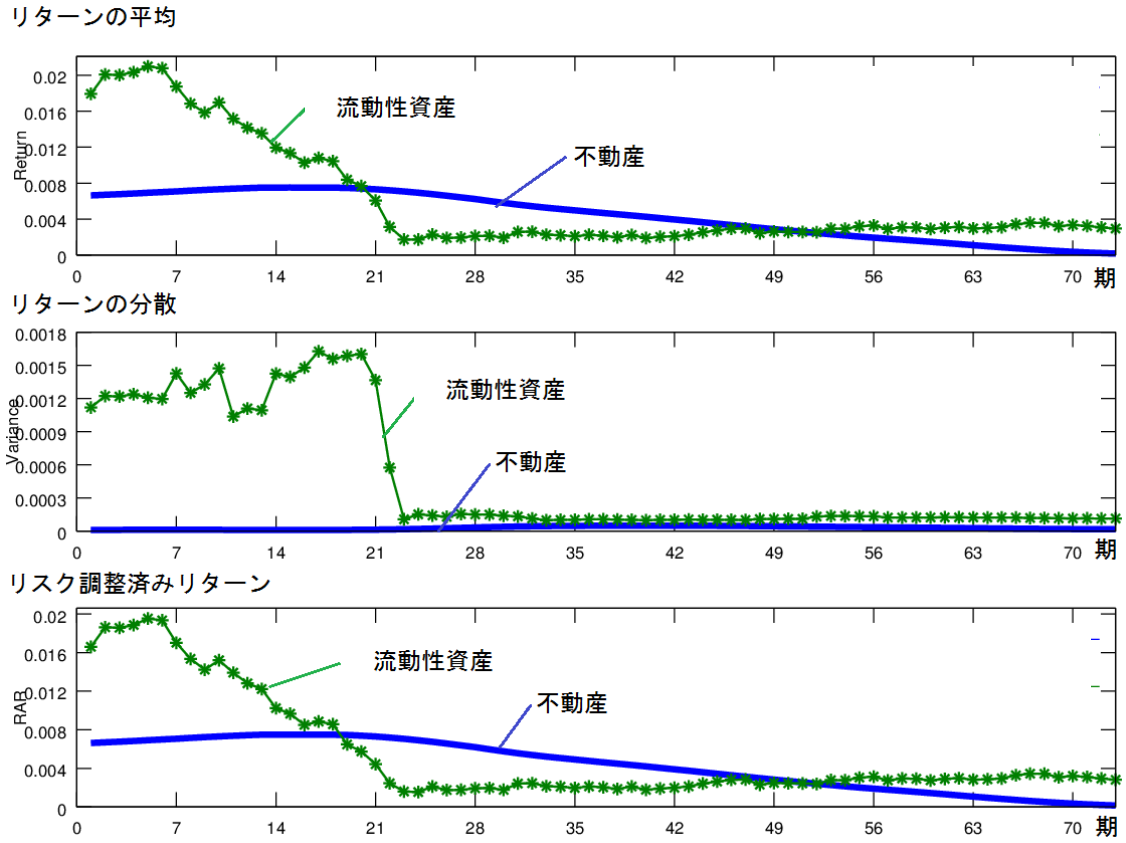
図 5.7.1.1 に将来の想定をした 2 資産の平均，分散，リスク調整済みリターン（リスク回避度 $\gamma = 3.4$ の下でのケース）の時系列図を示す。73 期あるうちの半ばで不動産のリスク調整済みリターンが流動性資産を上回る状態になっており, ここでポートフォリオが不動産保有に切り替わることが考えられる。一方その両側の期間では不動産保有がどれだけ評価されるのかという点が関心となろう。以下，次の流れで分析を行った。

- 取引費用の設定に関する考察
- 取引費用のケース設定（全 13 ケース，リスク回避度$\gamma = 3.4$）と解の特徴
- 主要な取引費用ケース（6 ケース）におけるリスク回避度別の解の特徴

さて，取引費用パラメータについては，仮想のものを設定しており，実データに基づく分析は今後の課題としている。その理由は以下である。①本研究が，個人投資家のみならず機関投資家の行動をも意識していること。個人投資家であれば，法定不動産仲介手数料等で代用できる。宅地建物取引業法に定める法定不動産仲介手数料の最大がおよそ 3%（厳密には前後する）であり，その他登記費用等を含めると，5-10%程で推移するとされている。しかし，機関投資家に内在する取引費用には，内部運用不動産チームの大小と案件毎に費やす人員配分，また外部委託運用者に対して支払う委託料などによって機会費用含めバリエーションがある。さらに, 今現在までに,

この費用にかかわるデータが不足しており，即座に利用できるものがない。次に，②本研究では，構築モデルの検証を目的としており，パラメータの設定を様々に行ったうえで，モデルの出力についてその信頼性を精査することを優先している。そのうえで，③本文中に設定されているパラメータのなかには，非現実的に見えるものはあるものの，本研究では，実務において通常考えられない（もしくは気づかない）パラメータの設定を通じて，実務でも知られていない同費用の効果を探る意図をも持つ。そのため，仮想パラメータの設定にあたっては，シミュレーションを繰り返したのち，不動産ウェイトに対して顕著な影響を及ぼしたパラメータを列挙している。実際のデータに基づく分析は今後の課題としたい。

図 5.7.1.1　実データに基づく不動産と流動性資産の対数リターンの平均･分散の将来想定



5.7.2 取引費用の設定に関する考察

取引費用は本来不動産の取引データを基に実証的に設定すべきものである。しかしここではむしろ，取引費用の設定によって動的計画法の解がどのようなバリエーションを有するのかを捉えることを目的に分析を行いたい。現実への妥当性はそれらの解の中からあとで考察することにしたい。

取引費用が資産の将来リターンとともに不動産の保有の意思決定に大きく影響することは容易に想像できる。ここでは，動学的最適化の下での厳密な考察というのではなく，分析のためのケース設定に資するようなおおよその考察をするにとどめておきたい。

いまある時点で流動性資産を 100%保有しているとする。次期から T 期間にわたって，同じく流動性資産を 100%保有し続けるか，それとも不動産を 100%保有することに切り替えるか，どちらかを選択するものとする。またT 期間における，不動産資産のリターンの 1 期当たりの平均と分散をm_R，${\sigma_R}^2$とし，同じく流動性資産のそれらをm_L，${\sigma_L}^2$とする。流動性資産をT 期間にわたって保有するときの効用をu_Lとすると，これは(5.2.2)式において流動性資産のウェイトを 1，不動産のウェイトを 0 とすることによって次のように表すことができる。

$$u_L = T\left(m_L - \frac{\gamma - 1}{2}{\sigma_L}^2\right) \tag{5.7.1}$$

これはリスク調整済みリターンを T 倍したものにほかならない。

一方，100%を不動産に切り替えるとすると取引費用が発生するので(5.2.12)式の「$m_{C,t}$：取引費用による資産減少の対数リターン換算値（< 0）」が加わることを考慮しなければならない。いま(5.2.12)式を近似して

$$m_{C,t} = \log\left(1 - \frac{C}{W}\right) \fallingdotseq -\frac{C}{W} = -\left(\alpha_1 + \frac{\alpha_0}{W}\right) \tag{5.7.2}$$

と表すことにする。ここで表 5.2 の(5.2.8)式を用いて導いた。また $x_t P_t = W$ とみなした。また，α_0は固定費でα_1は比例費の比率である。すると，不動産に切り替えてT 期間保有するときの効用u_R は取引費用を考慮して次のように表される。

$$u_R = T\left(m_R - \frac{\gamma - 1}{2}{\sigma_R}^2\right) - \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_0}{W}\right) \tag{5.7.3}$$

不動産保有に 100%切り替える条件は，$u_R > u_L$ が成立することである。よって

$$T\left\{\left(m_R - \frac{\gamma - 1}{2}{\sigma_R}^2\right) - \left(m_L - \frac{\gamma - 1}{2}{\sigma_L}^2\right)\right\} > \alpha_1 + \frac{\alpha_0}{W} \tag{5.7.4}$$

が成立すればよい。すなわち，

「流動性資産から不動産に替えたときのリスク調整済みリターン（RAR）の超過分の T 期間累計」　＞　「総資産 1 単位当たりに占める取引費用」

となればよい。

さて図 5.7.1.1 によれば，実データをもとに設定した将来想定データではだいたい第 21 期～第 50 期の間で不動産の RAR が流動性資産の RAR を上回っている。またその後の第 53 期～第 73 期では流動性資産の RAR が不動産の RAR を上回っている。そこで，それぞれの期間で上回った分の RAR の累計を計算すれば，前者は流動性資産から不動産に替えるための，また後者は不動産から流動性資産に替えるための，取引費用の条件を示すことになる。さて RAR の累計は次の表 5.7.2.1 のようになる。

例えば，リスク回避度 $\gamma = 3.4$ のときの「第 21 期～第 50 期の不動産の RAR 超過分」の累計の値は，0.082（8.2%）である（ (5.7.4)式の左辺に当たる ）。よって，例えば不動産取得額の 8% が比例的な取引費用α_1で，固定費α_0が総資産の 0.1%を占めるというような場合は，「左辺＝8.2%＞右辺＝8.1%」となり，かろうじて不動産への切り替えの可能性があることになる。むろんこれは厳密なものではなく 1 つの目安に過ぎない。

表 5.7.2.1　リスク調整済みリターン（RAR）の超過分－リスク回避度別－

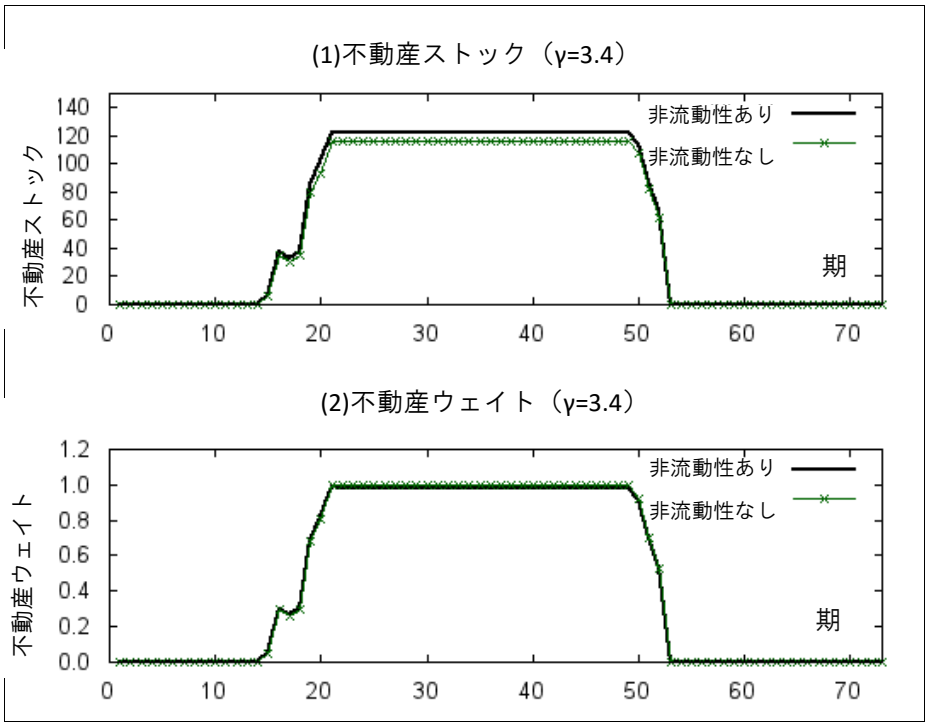
		リスク回避度（γ）			
		1.8	2.4	3.4	13.0
第 21 期～第 50 期の不動産の RAR 超過分	1 期当たり	0.0026	0.0027	0.0027	0.0034
	累計	0.0788	0.0800	0.0820	0.1012
第 53 期～第 73 期の流動性資産の RAR 超過分	1 期当たり	0.0020	0.0019	0.0019	0.0014
	累計	0.0412	0.0406	0.0396	0.0298

5.7.3 取引費用のケース設定と解の特徴

(5-1) 取引費用のないケース

始めに，実データを用いた将来想定データの下における「取引費用のないケース」の流動性解を見ておく。次の図 5.7.3.1 は，不動産ストックと不動産へのポートフォリオ配分比率についての解を図化したものである。平均・分散モデルで毎期解いた流動性解と，動的計画法で解いた非流動性解とはほぼ一致している。また不動産取得時のグラフの立ち上がりと売却時の降下の様子には，期ごとの漸次的な変化が現れている。この点は，この後の「取引費用のあるケース」における非流動性解との比較のポイントである。

図 5.7.3.1　取引費用がない場合の 2 資産モデルの流動性解



(注)　「Illiquid」は動的計画法で解いた非流動性解。「Liquid」は平均・分散モデルで解いた流動性解。

(5-2) 取引費用のあるケース　－動的計画法の解の特徴－

取引費用がある場合については，リスク回避度 $\gamma = 3.4$ の下で 13 通りのケースを設定した（表 5.7.3.1）。それぞれのケースについて動的計画法を実行して 2 資産の最適ポートフォリオを分析した。

表 5.7.3.1　取引費用の設定ケースと不動産保有形態の解の特徴

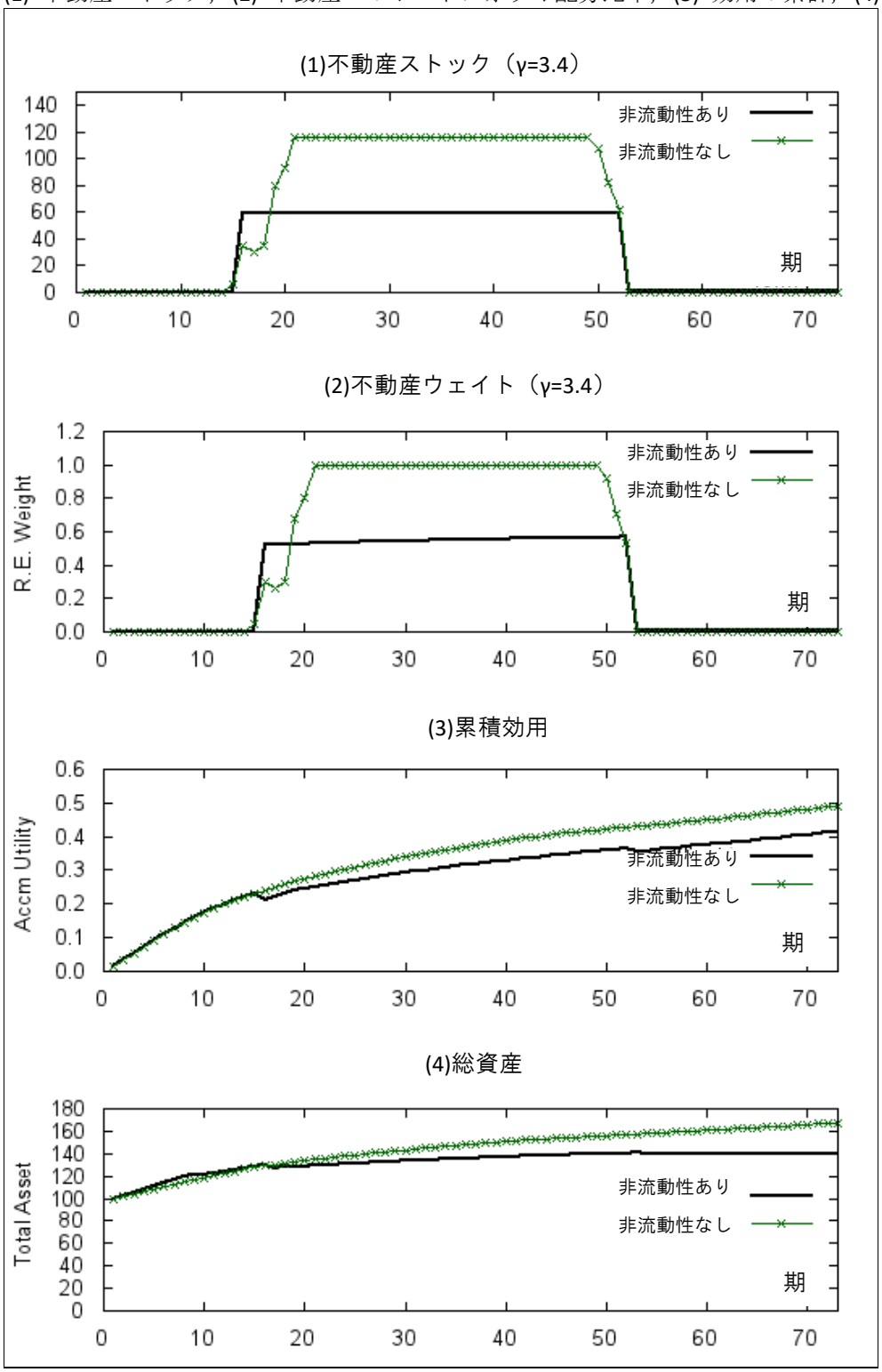
	取引費用のパラメータ				
	不動産取得時		不動産売却時		
	固定費	比例費	固定費	比例費	
ケース No.	α_0	α_1	β_0	β_1	不動産保有形態の解 $\gamma = 3.4$
1	0.1	0.02	0	0.002	準流動
2	0.1	0.02	0.1	0.005	準流動
3	0.05	0.05	0.05	0.02	半流動
4	0.1	0.05	0.1	0.005	半流動
5	0.1	0.05	0.1	0.02	半流動
6	0.03	0.07	0.03	0.02	半流動
7	1	0.02	1	0.01	半流動
8	2	0.02	2	0.01	半流動
9	2	0.02	2	0.02	一定保有
10	0.03	0.05	1	0.02	半流動
11	0.03	0.05	2	0.02	一定保有
12	0.03	0.07	0.03	0.04	保有ゼロ
13	0.05	0.08	0.05	0.03	保有ゼロ

(注)　固定費と比例費は，表 5.2(5.2.8)式，(5.2.9)式のα_0，α_1，β_0，β_1に当たる。

これら全ケースの結果をみる前に，まず 1 つのケースに着目して動的計画法の解の特徴をとらえておきたい。ここではケース 5 をみておく。図 5.7.3.2 のグラフ(1)は，不動産ストックの最適解をみたものである。「非流動性あり」とある実線が動的計画法で解いた最適解である。「非流動性なし」とあるのは毎期に平均・分散モデルを適用して流動性解を解いたものであり比較のためのものである。解は，第 16 期に不動産を取得しそれを保有して第 52 期に売却するのが最適な不動産保有形態だと告げている。グラフ(2)は，それに対応した不動産へのポートフォリオ配分比率である。保有の比率は約 50%が最適だと告げている。

さて，ここで図 5.7.3.2 のグラフ(3)に注目したい。これは投資家効用の累積を示したものであるが，取引費用を考慮したものは，していないものよりも低いことが分かる。あたりまえのでことではあるが，取引費用を考慮せずにポートフォリオ構築を進めると，投資家効用を過大評価してしまうことを示唆しており，取引費用考慮の必要性が明確である。

図 5.7.3.2　取引費用がある場合の動的計画法の解の例（ケース 5）
(1) 不動産ストック，(2) 不動産へのポートフォリオ配分比率，(3) 効用の累計，(4) 総資産



(注)　”――”は動的計画法による非流動性考慮解。”–*–*–”は平均分散モデルによる解（非流動性考慮なし）。

グラフ(3)は，目的関数であるところの加法分離型効用（表 5.2 の(5.2.2)式）の累積を表している。累積であるから毎期の効用（リスク調整済みリターン：RAR）がプラスである限り非減少曲線になるはずである。しかし，不動産の取得と売却のときに取引費用が発生するためその時点だけ効用がマイナスになる。よってグラフ(3)の第 16 期と第 52 期では累積曲線が一旦減少する様子を示している。これは動的計画法の解の特徴で，一旦減少してもその後の累積の増加が十分に減少を補って余りあるものであり，最終期には効用の累積が他の如何なる経路を経るよりも最大になることを見出している。

(5-3)　取引費用のあるケース：　全 13 ケースにみる解の特徴

全 13 ケースについての分析結果を，不動産ストックの最適保有解に着目して図化したのが図 5.7.3.3 である。また不動産へのポートフォリオ配分比率として図化したのが図 5.7.3.4 である。これらのグラフの形状をもとに全 13 ケースを分類すると，次の 4 タイプを見出すことができる。

第 1 は「A. 準流動性解」である。ケース 1，2 が該当する。流動性解に順応するようなグラフ形状となっている。

第 2 は「B. 半流動性解」である。ケース 3，4，5，6，7，8，10 が該当する。不動産の取得と売却の時期はほぼ流動性解と同じだが，不動産の取得量は流動性解ほど大きくはない。また変化は直線的で流動性解のような漸次的変化はない。

第 3 は「C. 一定保有解」である。ケース 9，11 が該当する。これは全期間を通じて一定の不動産保有量を最適解とするものである。非流動性解の典型的なタイプであろう。

第 4 は，「D. 非保有解」である。ケース 12，13 が該当する。これは全期間を通じて不動産を保有しないことを最適解とするものである。

不動産保有形態の解のタイプがこのように分かれる背景を取引費用に関連付けて解釈しておきたい。図 5.7.3.5 は，取引費用の設定値によってケース 1〜13 をマッピングしたものである。縦軸に不動産取得時の比例費をとり，横軸に売却時の比例費をとっている。固定費はプロットの凡例で区別している（図 5.7.3.5 脚注）。

第 1 の「A. 準流動性解」は，取得・売却のときの比例費も固定費も小さく設定したケースである。取引費用がないケースに近いので当然ながら流動性解に近い解になる。

第 2 の「B. 半流動性解」は，取得・売却のときの比例費をある程度大きく設定したケースである。ただし取得においては「不動産の RAR 超過分（表 6.1）」を超えないように設定している。このとき解で特徴的なのは，不動産の取得量が流動性解と比較して小さく抑えられるという点である。つまり取得時の比例費は，大きくなると取得量を抑える方向に作用する。一方，売却のときも比例費が売却量を抑える方向に作用すると考えられるが，ここでの比例費は，売却における「流動性資産の RAR 超過分（表 5.7.2.1）」を超えないように設定しているので，取得しただけの量を売却する結果になっている。

なお，「B. 半流動性解」のなかでも，ケース 7，8 は取得時の比例費が小さいにもかかわらず準流動性解とはならず半流動性解になっている。これは取得・売却の固定費を格段に大きく設定したことによると考えられる。一般に，固定費は「売買量の抑制」より「売買頻度の抑制」に効く。毎期売買をすると固定費は確実に「1 期当たりの RAR 超過分（表 5.7.2.1）」を引き下げることになり売買の効果を減ずることになるからである。しかしここではそれよりも，固定費を大き

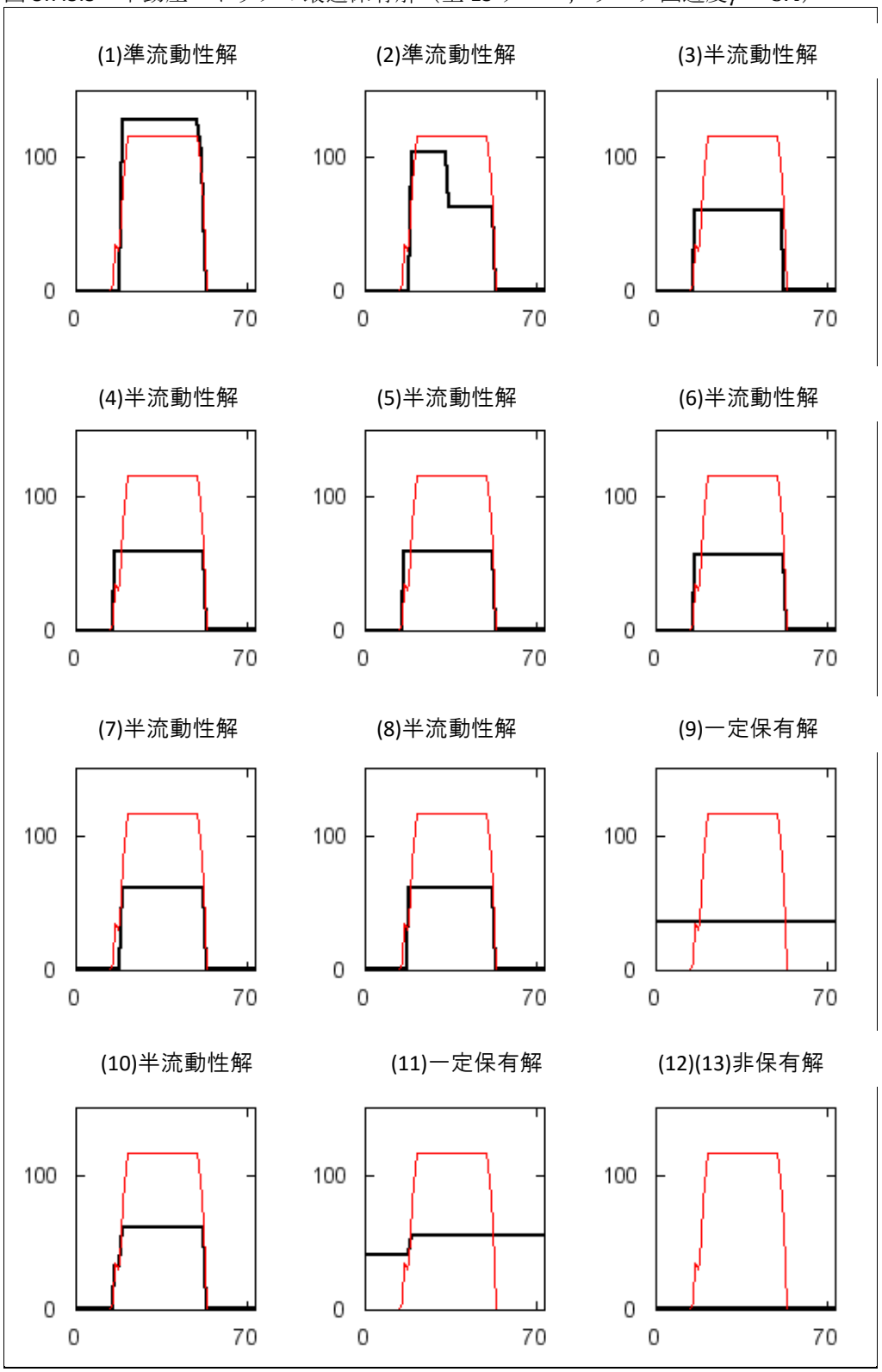
く設定したことが，不動産保有への切り替え条件(5.7.4)式の右辺を増大させて取得量の抑制に効いたものと考えられる。

第 3 の「C. 一定保有解」は，比例費だけみれば半流動性解の設定と大きく変わるものではない。しかしここでは取得・売却の固定費を大きく設定したことにより，「売買頻度の抑制」効果によって新規取得でなく「あらかじめ保有すること」がうながされ，かつ取得したら「あとは売却しないこと」がうながされた考とえられる。

第 4 の「D. 非保有解」は，取得・売却の比例費を大きく設定したものである。特に不動産の取得側で比例費が大きいことは, そもそも取得しても RAR 超過分が期待できないことを意味し，取得しない意思決定につながると考えられる。

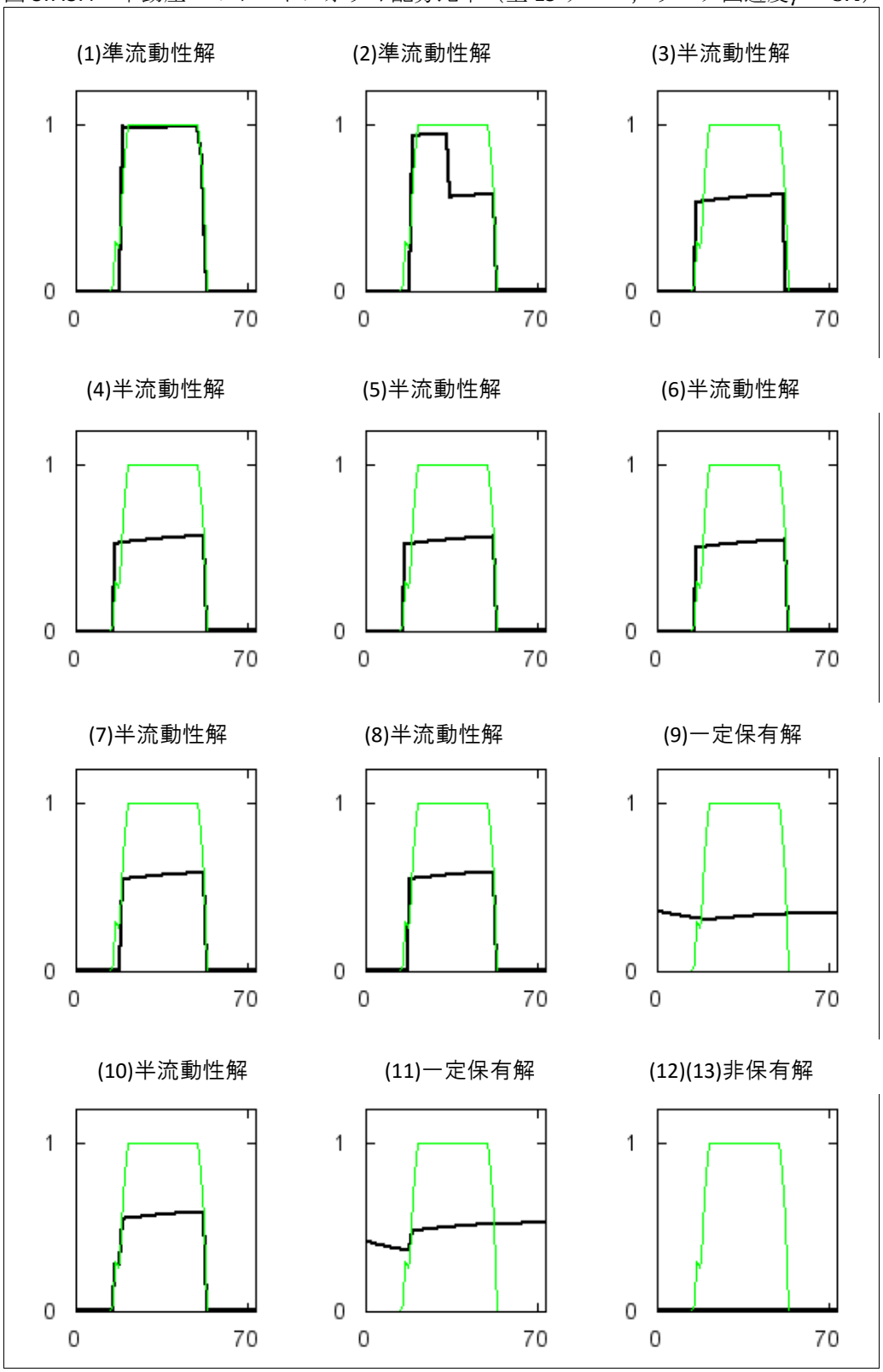
以上はリスク回避度 $\gamma = 3.4$ における分析結果であった。次の関心は，他のリスク回避度の下ではどのような解のタイプになるかという点である。先の表 5.7.2.1 に見るように RAR 超過分はリスク回避度によって異なるからである。

図 5.7.3.3　不動産ストックの最適保有解（全 13 ケース，リスク回避度$\gamma = 3.4$）



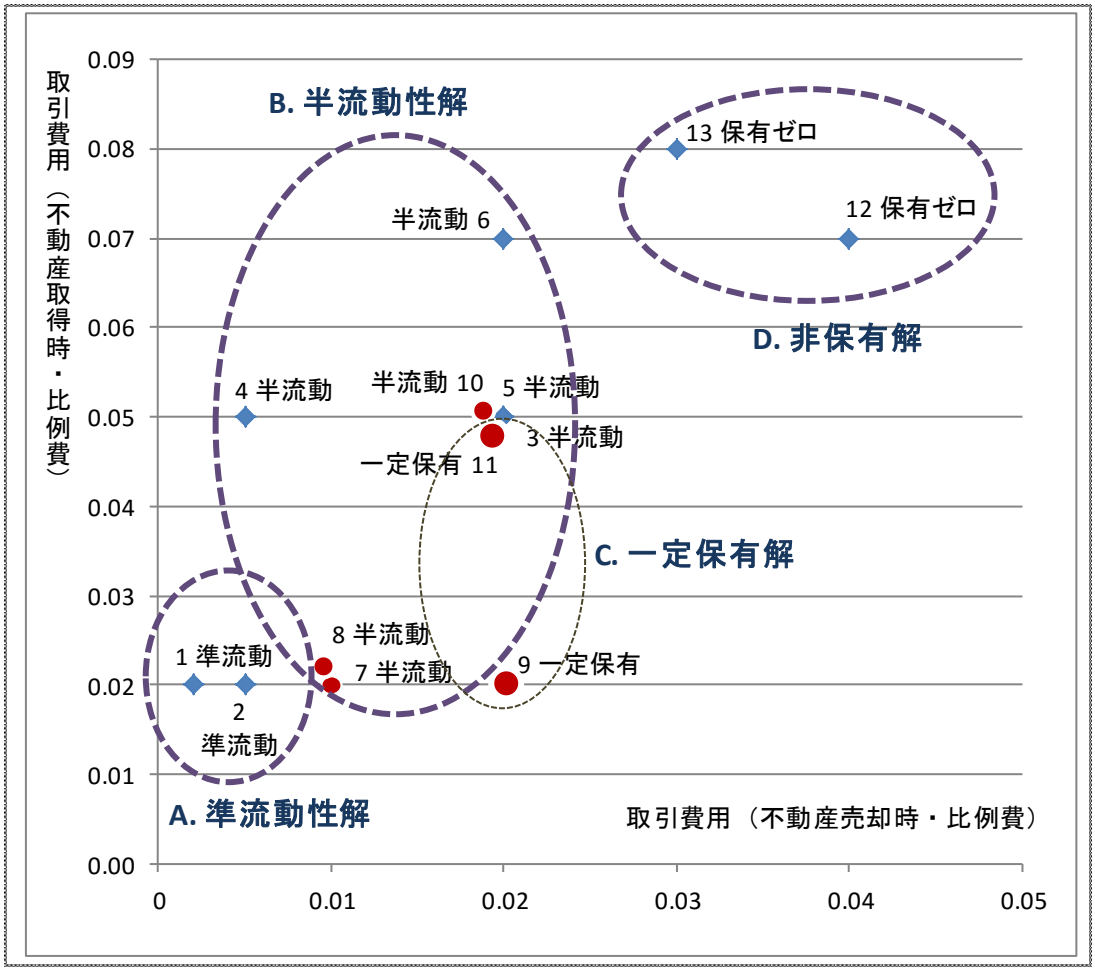
(注)　横軸は 1 期～73 期。縦軸は不動産ストック。"―"は動的計画法で解いた非流動性解。"–"は平均・分散モデルで解いた流動性解。

図 5.7.3.4　不動産へのポートフォリオ配分比率（全 13 ケース，リスク回避度$\gamma = 3.4$）



(注)　横軸は 1 期～73 期。縦軸は不動産へのポートフォリオ配分比率。"―"は動的計画法で解いた非流動性解。"–"は平均・分散モデルで解いた流動性解。

図 5.7.3.5　取引費用の設定ケース別にみた不動産保有形態の解



(注)　1～13 の数字はケース番号。◆は売却・取得時の固定費が小さいもの，●は大きいもの。

5.7.4 主要な取引費用ケースにおけるリスク回避度別の解の特徴

「A. 準流動性解」,「B. 半流動性解」,「C. 一定保有解」,「D. 非保有解」のそれぞれから，1 つまたは 2 つのケースを選んで, それらのケースについてさらにリスク回避度を変えて分析を行った。選択したケースは全部で 6 ケースである。概要を次の表 5.7.4.1 に示す。またケース別かつリスク回避度別に不動産ストックとポートフォリオ配分比率の最適解をグラフ化したものを付図 5.5.1～6 に挙げた。

投資家のリスク回避度γ（表 5.2 の(5.2.1)式と(5.2.2)式）を$\gamma = 1.8$，2.4，3.4，13.0 と設定しこの 4 ケースごとに分析を行った。この設定は，第 4 章におけるリスク回避係数θに整合させている。$\theta = (\gamma - 1)/2$の関係にあり，第 4 章表 4.2.2.2 では$\theta = 0.4$，0.70，1.20，6.00 と設定している。

この場合の取引費用パラメータの設定についてであるが，これは数十通りのシナリオを考え，シミュレーションを行った結果, 不動産ウェイトに与える影響が顕著であった組み合わせをここに載せている。

表 5.7.4.1　取引費用の設定ケース別，リスク回避度 γ 別に見た不動産保有形態の解の特徴

	取引費用のパラメータ(1)				不動産保有形態の解			
	不動産取得時		不動産売却時					
	固定費	比例費	固定費	比例費				
ケース No.	α_0	α_1	β_0	β_1	$\gamma = 1.8$	$\gamma = 2.4$	$\gamma = 3.4$	$\gamma = 13.0$
2	0.1	0.02	0.1	0.005	準流動	準流動	準流動	準流動
5	0.1	0.05	0.1	0.02	半流動	半流動	半流動	半一定保有(2)
9	2	0.02	2	0.02	半流動	半一定保有(3)	一定保有	一定保有
11	0.03	0.05	2	0.02	保有ゼロ	一定保有	一定保有	一定保有
12	0.03	0.07	0.03	0.04	保有ゼロ	保有ゼロ	保有ゼロ	一定保有
13	0.05	0.08	0.05	0.03	保有ゼロ	保有ゼロ	保有ゼロ	一定保有

(注)　1. 固定費と比例費は，表 5.2(5.2.8)式，(5.2.9)式のα_0，α_1，β_0，β_1に当たる。
2. 初期から保有して後期途中で一部を売却する。付図 5.5.2。
3. 前期途中に取得して最終期まで保有する。付図 5.5.3。

5.7.5 考察

分析結果から観察される特徴は次のことである。

リスク回避度 γ が大きくなるにつれ，同じ取引費用の下であっても非流動性の程度の強い不動産保有形態を選択する傾向がある。例えば，ケース 5 では「半流動」→「半一定保有」，またケース 9 では「半流動」→「半一定保有」→「一定保有」と選択が変わる。これはそもそも流動性解においても，リスク回避度 γ が大きくなると，不動産保有の傾向が全期にわたって強まる様子が見られることと相似である。すなわち，RAR で評価したとき

「不動産 RAR」－「流動性資産の RAR」

の評価値が高まり，不動産へのポートフォリオ配分比率が高まるからだと考えられる。不動産は高い取引費用を考慮してもなお，リスク回避度の高い投資家に対しては，市場のサイクルに左右されない投資戦略を支持しているといっても良いだろう。つまり不動産は，市場が過熱していようが不況にあろうがリスク回避型投資家にとっては，一定量を購入して持ち続けることが，全体の期間を通して有用な戦略となることがわかる。

しかし，これはリスク回避度が高い投資家のみならず，多くの投資家でも，取引費用が大きくなるに従い，不動産を投資開始時点に購入し終了時点まで一貫して持ち続ける一定量保有最適解が見えてくる。つまり，取引費用の影響下では，一定保有解は多くの投資家に当てはまるケースであるということであろう。これを「**取引費用の一定量保有効果**」と呼ぶことにする。

比例費は大きくなるほどに，不動産の取引量に対して影響を及ぼす。ケース 1 から 13 にかけて，比例費が増すごとに，不動産の保有量が減っていくことがわかる。ケース 2 のように，

取引量を調整する準流動性解から，ケース 3―8，10 のように保有量を減らす半流動性解へと移り，最終的にはケース 12―13 のように一切保有しない非保有解へと変化していく。しかし，ここで固定費の設定を大きくすると，一定保有解が出てくることがわかる。比例費の設定を大きくしても，保有量が減少するだけで，一定保有解は見られない。この一定保有促進効果は，固定費の特徴といえるだろう。

なかには，リスク回避度 γ が小さいときは「非保有解」が選択されていたケースであっても，リスク回避度 γ が大きくなるにつれ「一定保有解」が選択される傾向がある。例えば，ケース 11，12，13 である。これも上と同様に不動産への配分の評価が高まるからであろう。取引費用により確実にリターンを落とすものの，それを勘案してもリスク分散役としての不動産は魅力的な資産クラスであるといえよう。

購入時の取引費用が大きく，売却時の費用が小さい場合（ケース 2）においては，一度に多く購入し，タイミングを見計らいながら，段階的に売却をしていく，という戦術的な投資を行っていることがわかる。つまり，取引費用は，取引の頻度に大きな影響を及ぼすことの再確認である。取引が多くなるほどに収益をあげることが難しくなるため，大量に購入しタイミングを見計らいながら小分けにして売却という投資行動も有効である。全体の傾向として，取引費用の導入によって，不動産が一定の塊によって取引されることが見て取れる。これを「**取引費用の取引量集塊効果**」と呼ぶことにする。

しかし，購入時と売却時の取引費用に大きな差がない場合においては，たとえ売却費用のほうが相対的に小さかったとしても，異なる結果を出す。購入と売却のタイミングは，非流動性を考慮しない平均分散モデル解と一致していても，資産配分比はおよそ 50%減少させる準流動解となる。取引費用は保有量に影響を及ぼすということの再確認である。これを「**取引費用の保有量抑制効果**」と呼ぶことにする。

最終的には取引費用の増加とともに，不動産を一切保有しないという最適解も出てくる。取引費用は保有量と取引頻度に影響を及ぼすことがわかったが，あまりにも取引費用が大きすぎると不動産投資の魅力を減少させていき，最終的には魅力を失くさせてしまう。これも取引費用の保有量抑制効果の影響である。

つまり，取引費用の影響が大きくなるにつれ「準流動性解」，「半流動性解」，「一定保有解」，「非保有解」の順に非流動性が高くなるような解を生じさせることがわかる。つまり，この順序が取引費用という非流動性要因が与える影響の度合いと考えて良い。

これらのことから，取引費用の存在はかなり大きく不動産のポートフォリオ選択に効くといえる。つまり非流動性を左右する要因である。比例費は特に不動産の取得量や売却量に抑制的に作用する。固定費は取得や売買の頻度に抑制的に作用する。上記にしてきした，取引費用の一定量保有効果・取引量集塊効果・保有量抑制効果を，投資家のリスク回避度に応じた組み合わせによって，不動産の投資パターンが異なってくることを確認した。

上記のような知見が得られたが，これらはあくまでも取引費用が不動産ウェイトに与える影響の“傾向”を示したに過ぎない。取引費用パラメータの設定にあたっては，様々なケースを

仮定し試験を行い，最も影響を及ぼすものを列挙したに過ぎない。これはあくまで本研究で構築したモデルの実用性を検証する目的で行われたものである。今回の試験で，十分に分析モデルとして機能することが証明されたので，今後は実証的なデータに基づいて試験する必要があるだろう。

5.8　市場滞留時間のモデル化

これまで取引費用に焦点を当てたモデル分析を行ってきた。次に市場滞留時間(TOM)に焦点を移して論考を行っていくことにする。

5.8.1 モデル化に関する考察

いま t 期に不動産を売却することが最適政策であるとする。これは t 期のベルマン方程式，

$$U_t(Z_t) = \max_{x_t} [\, u_t(Z_t, x_t) + U_{t+1}(Z_{t+1}) \,] \tag{5.8.1.1}$$

の解が，$x_t = x^*\ (<0)$ であることを意味している。$u_t(Z_t, x_t)$: t 期の不動産ストック量Z_tで，取引量x_tの状態におけるポートフォリオの収益に基づく t 期の効用を表す。$U_t(Z_t)$は t 期の不動産ストック量がZ_tの状態での期末の効用も考慮した全効用である。

ここで t 期に確定的に売却できるとは限らず，売却成立の時期は，t 期に売りに出してから市場滞留時間 $\tau\ (=0,1,2,\cdots,\tau_1)$ が経過した時点で確率的に定まるとする。つまり確率 $\psi(\tau)$ で $t+\tau$ 期に売却できるとする。またt 期から$t+\tau_1$ 期までの間には必ず売却が成立するものとする。この $\psi(\tau)$ を売却成立確率，τ_1 を最大市場滞留時間と呼ぶことにする。確率 $\psi(\tau)$ は不動産売買が活発な時期とそうでない時期とで異なった確率分布をすると考えてもよい。その場合には売却成立確率を $\psi_t(\tau)$，最大市場滞留時間を $\tau_1(t)$ のように表記するのが正確であろう。しかしいまはそうした違いは考えないで一律の確率分布と最大市場滞留時間とを仮定するだけにする。

$$\text{売却成立確率 } \psi(\tau) \text{ の分布：} \psi(0), \psi(1), \psi(2), \cdots, \psi(\tau_1) \left(\sum_{\tau=0}^{\tau_1} \psi(\tau) = 1 \right) \tag{5.8.1.2}$$

すると，t 期に売却が成立するときのベルマン方程式の右辺の期待値は，次のように表される。

$$[\, u_t(Z_t, x^*) + U_{t+1}(Z_t + x^*) \,]\psi(0) \tag{5.8.1.3}$$

なお，$(Z_{t+1} = Z_t + x_t)$である。

また，$t+1$ 期に売却が成立するときの同期待値は，次のように表される。

$$[\, u_t(Z_t, 0) + u_{t+1}(Z_t, x^*) + U_{t+2}(Z_t + x^*) \,]\psi(1) \tag{5.8.1.4}$$

一般に，$t+\tau$ 期に売却が成立するときの同期待値は，次のように表される。

$$\left[\sum_{\eta=0}^{\tau-1} u_{t+\eta}(Z_t, 0) + u_{t+\tau}(Z_t, x^*) + U_{t+\tau+1}(Z_t + x^*) \right] \psi(\tau) \tag{5.8.1.5}$$

(5.8.1.5)式が意味するのは，次のことである。

「t 期に売りに出して，t 期から$t+\tau-1$ 期までは売却が成立しないので不動産ストック Z_t のままでポートフォリオから収益を得て毎期効用 $u_{t+\eta}(Z_t, 0)$ を享受する。$t+\tau$ 期に $x^*\ (<0)$ を売却できるので効用 $u_{t+\tau}(Z_t, x^*)$ を享受する。$t+\tau+1$ 期からは，不動産ストック $Z_t + x^*$ から出発して最終期に至るまで最適政策をとって享受できる効用の合計の最大値 $U_{t+\tau+1}(Z_t + x^*)$ を享受する。これらが確率 $\psi(\tau)$ で生ず

る。」

これらすべての期待値を用いて不動産を売却するときの当初のベルマン方程式は次のように書き替えられる。

$$U_t(Z_t) = \max_x \left\{ \sum_{\tau=0}^{\tau_1} \left[\sum_{\eta=0}^{\tau-1} u_{t+\eta}(Z_t, 0) + u_{t+\tau}(Z_t, x) + U_{t+\tau+1}(Z_t + x) \right] \psi(\tau) \right\} \quad (5.8.1.6)$$

ここで常に

(5.8.1.1)式右辺 ≧ (5.8.1.6)式右辺　　(5.8.1.7)

が成立する。(5.8.1.1)式右辺の値は，市場滞留がなくt期に売却が成立してそれ以後最適政策で最終期までの効用の合計の最大値を享受することを意味する。その値は，市場滞留があるかもしれない(5.8.1.6)式右辺の値と等しいかより大きい。値に差があれば，その差は市場滞留時間がもたらす効用の減少である（リスク調整済みリターンでもある）。

さてこうした定式化は，確率動的計画法と呼ばれる。Howard(1960)[2]，Ross(1983)[3]などが参考文献としてある。こうした定式化を通じて市場滞留時間という重要な非流動性要因をモデル化できる可能性があることがわかった。しかしながら本研究の段階は，非流動性を動学的に扱うに当たってのまだ初期の段階であり，一度に多様な非流動性要因を扱うことは動学モデルの特性を捉える上でも得策ではないと考える。そこで，次の通り，逸失利益として市場滞留時間を捉えたうえでモデル化を図りたいと考える。

5.8.2 逸失利益による TOM のモデル化

さて，ここで別の側面から市場滞留時間をポートフォリオ分析のためにモデル化することにしよう。もとになる考え方は，TOM により売却が遅れたときの最適解を表すベルマン方程式である。これを，次の仮定をおいて適用すると取引費用の比例費と類似の位置づけで，TOM のもたらす機会費用を扱うことができる。ロジックは以下の通りである。

- 投資家は，将来の各t期における資産のリターンの期待値に関する情報を知っている。
- 投資家は，将来の不動産の取得時点または売却時点において平均してτ期の遅れ(TOM)が発生すると予想する。
- 投資家は，将来の各t期における TOM がもたらす機会費用を予想し，それがリスク調整済みリターン（加法分離型効用）の減少分だと想定する。
- TOM がもたらす機会費用とは，不動産の取得または売却が遅れたことにより「遅れなかったなら得られたはずの利益」（逸失利益）であると定義する。これは「遅れない場合に形成される総資産額」と「遅れる場合に形成される総資産額」の差をt期の現在価値に直したものである。この機会費用はt期ごとに異なった値を持つ。以下のように考察できる。

いま不動産x単位を，t期に$P(t)$の価格で取得してそれ以後h期間保有することを考える。保有期間末の$(t+h)$期における資産額に注目する。以下の式中で，Rは不動産のリターンの期待値，

[2] Howard, R.A.(1960)，Dynamic programming and markov processes , MIT press（邦訳：関根智明・羽鳥裕久・森俊夫(1971)，ダイナミックプログラミングとマルコフ過程，培風館, p.32）

[3] Ross, S. M.(1983), Introduction to Stochastic Dynamic Programming, Academic Press.

Lは流動性資産のリターンの期待値である。t期からあとh期間は同一であると仮定する。なお，ある程度離れた異なるt期になるとR，Lの値は異なることが考えられるが，ここではそれは考えないものとする。

(1) 取引費用についての考察

まず比較のもとになる取引費用の場合を，上の機会費用のロジックを使って考察する。取引費用Cがあるとき，$C + xP(t)$を投じて，h期後に資産額は

$$xP(t)(1+R)^h \quad \left(= Y' \text{とする}\right) \tag{5.8.2.1}$$

になる。取引費用Cがないとき，同じ額 $C + xP(t)$を投じて，h期後に資産額は

$$C(1+R)^h + xP(t)(1+R)^h \quad \left(= Y \text{とする}\right) \tag{5.8.2.2}$$

になる。これをもとに次が言える。

$$\text{「取引費用がもたらす資産の減少分」} = Y - Y' = C(1+R)^h \tag{5.8.2.3}$$

だから，これを$(1+R)^h$で割り引いて，t期にCだけ費やした（(つまり資産を減少した）ことがわかる。要するにもとの取引費用Cになる。

(2) TOM についての考察 1: 取得のための追加補填がない場合

t期に$xP(t)$を投じて不動産を取得しようとするが，売却がτ期遅れるとき，τ期までに蓄積した資産$xP(t)(1+L)^\tau$ を投じて不動産を取得し，それを$(t+h)$期まで保有するとする。このとき，当初予定していたx単位の不動産は取得できない。x単位より減少する。価格が$P(t+\tau)$に上昇しているためである。

τ期遅れるとき，$xP(t)$を投じて，h期後に資産額は

$$xP(t)(1+L)^\tau(1+R)^{(h-\tau)} \quad \left(= Y' \text{とする}\right) \tag{5.8.2.4}$$

になる。遅れがないとき，$xP(t)$を投じて，h期後に資産額は

$$xP(t)(1+R)^h \quad \left(= Y \text{とする}\right) \tag{5.8.2.5}$$

になる。これをもとに次が言える。

$$\begin{aligned}
&\text{「}\tau\text{期遅れがもたらす資産の減少分」} = Y - Y' \\
&= xP(t)(1+R)^h - xP(t)(1+L)^\tau(1+R)^{(h-\tau)} \\
&= xP(t)(1+R)^h[1-(1+L)^\tau(1+R)^{-\tau}] \\
&= xP(t)(1+R)^h[1-(1+\tau L)(1-\tau R)] \quad \text{(近似計算をした)} \\
&= xP(t)(1+R)^h[\tau(R-L)] \quad \text{(近似計算をした)}
\end{aligned} \tag{5.8.2.6}$$

これを$(1+R)^h$で割り引けば，t期に

$$xP(t)[\tau(R-L)] \tag{5.8.2.7}$$

だけ費用を投じたことに相当するとわかる。これは，あたかも取引額$xP(t)$に比例して費用$xP(t)[\tau(R-L)]$が生じたとみなした場合に類似である。

(3) TOM についての考察 2: 取得のための追加補填がある場合

τ期遅れるとき，τ期までに蓄積した資産$xP(t)(1+L)^{\tau}$では，当初予定していたx単位の不動産を取得できない。τ期の不動産価額は$xP(t)(1+R)^{\tau}$ に上昇しているからである。それでも追加補填をして予定通りx単位の不動産を取得するとする。
遅れがないとき，$xP(t)$を投じて，h期後に資産額は

$$xP(t)(1+R)^{h} \tag{5.8.2.8}$$

になる。τ期遅れるとき，τ期に

$$xP(t+\tau) = xP(t)(1+R)^{\tau} \tag{5.8.2.9}$$

を投じて，その$(h-\tau)$期後に資産額は

$$xP(t)(1+R)^{h} \tag{5.8.2.10}$$

となり，$(t+h)$期時点での資産額は，遅れがないときの資産額と等しくなる。
ところが，この場合τ期に追加補填

$$xP(t)(1+R)^{\tau} - xP(t)(1+L)^{\tau} \tag{5.8.2.11}$$

をしている。これを $(1+L)^{\tau}$ で割引して t 時点での現在価値に直すと

$$\begin{aligned} &xP(t)(1+R)^{\tau}(1+L)^{-\tau} - xP(t) \\ &= xP(t)[\tau(R-L)] \quad \text{(近似計算をした)} \end{aligned} \tag{5.8.2.12}$$

となる。つまり，これだけ初期の t 期時点で取得費用を余計に投じたことになる。これが，追加補填がある場合の機会費用であり，これは上と同額である。

以上，(2)(3)の考察をもとに不動産取得時の TOM の機会費用は次のようになる。

- 取引費用の場合の，取引額に比例して発生する比例費と同様に扱うことができる。
- そのときの比例比率は

$$\tau(R-L) \tag{5.8.2.13}$$

とすればよい。なお，不動産売却時の比例比率は

$$\tau(L-R) \tag{5.8.2.14}$$

である。

- 比例比率はt期ごとに異なる。
- 発生する機会費用は実際の資産の喪失にはならない。

5.8.3 分析結果

以下，実際に TOM を逸失利益として取り扱った場合の分析結果である。

売買を先取りして変化する。リターン差が大きくなるときが売買の好機だが，それは同時に TOM 機会費用が大きくなるときでもある。そこで，シミュレーション結果は，早めに売買するのが最適だと告げている。特に図 5.8.3.2 は顕著に読み取れる。これが TOM を考慮するときの最大の特徴であろう。

つまり，TOM は取引のタイミングに影響を及ぼす。投資家にとって TOM の存在は先行投資を促進する要因であるといえよう。これを「**市場滞留時間の取引先行効果**」と呼ぶことにする。この取引先行効果は，TOM が長くなるほどに効果を増していく。

ステップ変化でなくなだらかに変化する個所が見受けられるのは,取引費用の固定費に相当する費用がないためであろう。やはり取引費用を併せて考慮することが現実をよりよく反映するであろう。

リスク回避度の高い投資家が保有量を減らしていることもわかる。取引費用のように，保有量を減らし，準流動性解もしくは一定保有解に近づいている。つまり，TOM はリスク回避度の高い投資家に対して，タイミングのみならず保有量にも影響を与えることが見て取れる。これは，TOM を逸失利益として捉えているためであるが，取引費用と同様の効果であるので，これを「**市場滞留時間の取引費用的効果**」と呼びたい。

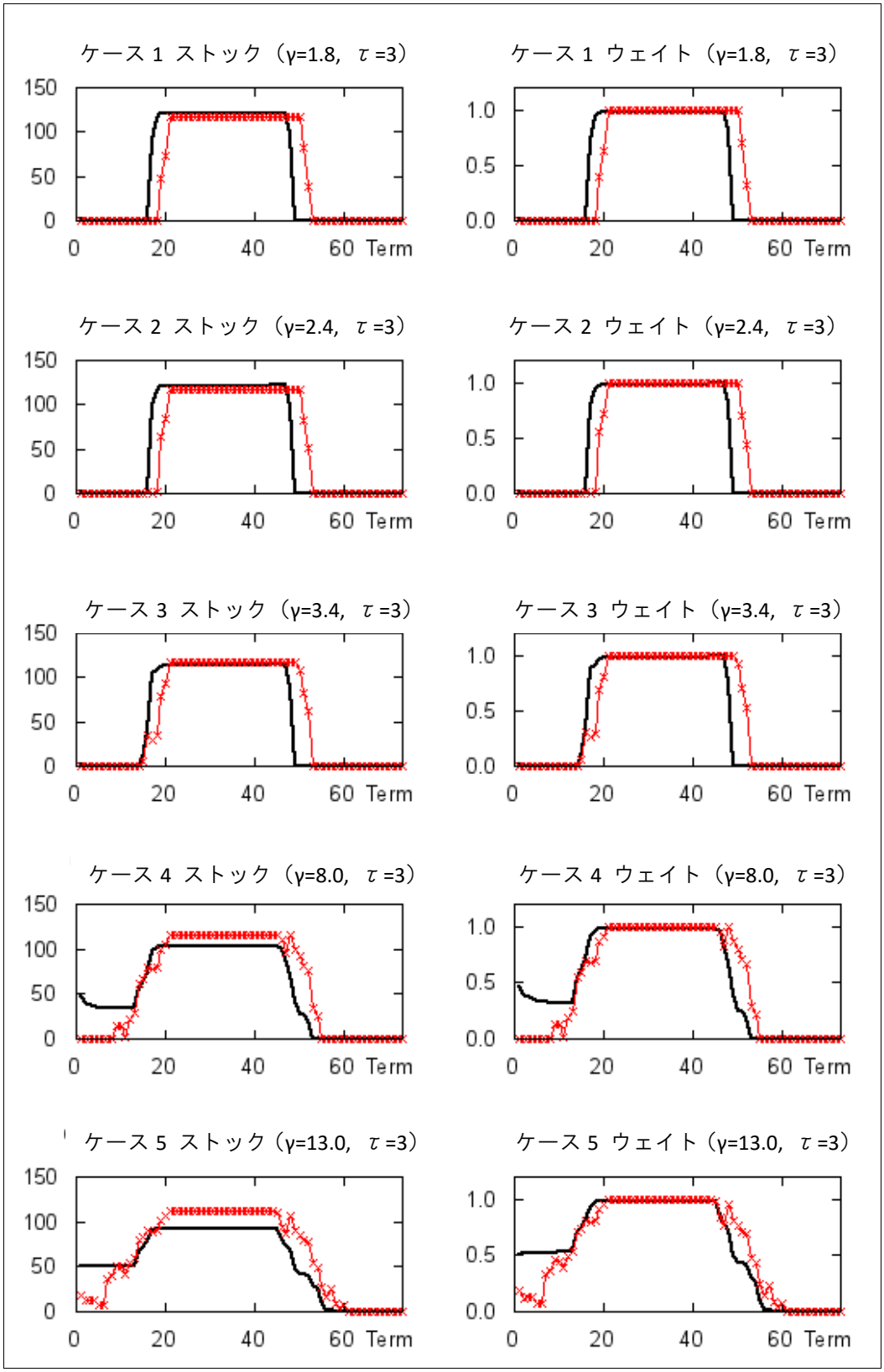
前述の通り，TOM は分析モデル中に，比例費と類似した扱いを受けている。そこで，類似した扱いを受けるものであれば，比例費と類似した結果を期待するものであるが，異なる分析結果（先行効果）を示している。この理由は次の通りである。まず①取引費用は，実際の支出を行っているため，ポートフォリオ資産総額に影響を与える。つまり，負の影響を持つ。しかし，逸失損失つまり機会費用として扱われる TOM は，実際の損失を出すものではなく，ポートフォリオ資産総額に影響を与えない。つまり，獲得できるリターンは減るけれども，資産額自体が減るものではない。そこでモデル内の想定投資家は，機会損失を最小限にするため，先読みをして行動を行うことになる。例えば，X から X+1 の期間の間に，最も高い不動産のリターンが取得できることがわかっている（あるいはその期間に不動産を取得することによってポートフォリオ全体のパフォーマンスが向上する）が，そのリターンを取得するためには，TOM 期間分を考慮して前もって取得しておく必要がある。売却の場合も同様である。②無論，TOM 期間分ずれたことによって最適な資産配分比に対し変化が生じるため，寸分たがわずに TOM 分ずれるということではない。③本モデルの前提として，投資家は将来への完全な見通しをもっていると仮定しているために，引き起こされた結果であるともいえる。これも動学的最適化の特徴である。④「取引費用の比例費」と「TOM による逸失利益」はともに「不動産の取得/売却量」×「1 単位当たり費用/逸失利益」という式で表される。似ているが，取引費用の場合「1 単位当たり費用」は全期間を通じて一定だが，TOM による逸失利益の場合「1 単位当たり逸失利益」は時期によって異なる。つまり期の関数である。したがって「1 単位当たり逸失利益」が大きい時期に差し掛かると，取得/売却を早めにすることが最適行動になる。

市場滞留時間については第 1 章で整理した通り,長い取引プロセスを持つことが知られており,この影響も大きく成り得るだろう。しかし，本研究では実際のデータに基づいて行われたものではなく,あくまで仮想パラメータによるものである。今後は,実データを用いた試験が望ましい。

5.8.4 bid/offer 戦略のモデル化への期待

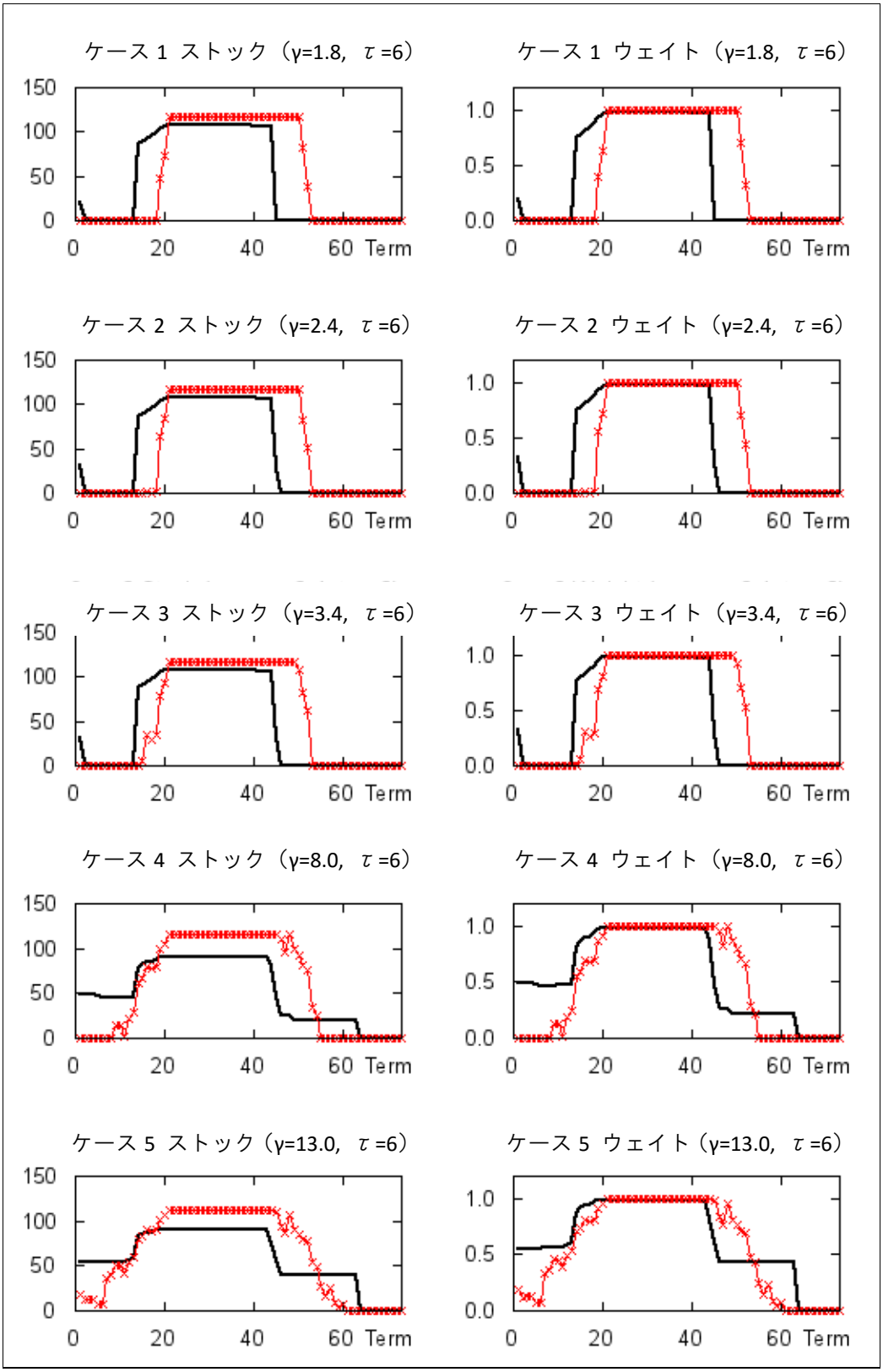
さて，これらモデルの検証を通じて今後のモデルの発展についても期待できる点もある。投資家の bid/offer 戦略のモデル化である。TOM の存在に対し投資家が単に受け身で行動するのでなく，価格戦略で対応することにより TOM を短縮するような行動が考えられるが，そのような投資行動もモデル化は多種多様な投資シナリオを分析する際には有用なものとなってくる。本研究では取引費用と市場滞留時間のモデル化のみを行ったが,工夫を加えることによって投資家の選好・戦略によって取引費用と市場滞留時間が変動する bid/offer 戦略モデルも表現することができると考える。例えば，早く不動産を売却したい投資家は，高い取引費用（価格割引率）を支払うことにより市場滞留時間を短くするだろう。つまり，売り急ぎ・買い急ぎといった投資家の状況をモデルで表現できることになる。同モデル化は今後の課題として残るが動学的最適化モデルのさらなる発展が期待できる。

図 5.8.3.1　TOM を考慮した 2 資産モデルシミュレーション（TOM=3 期ケース）



(注)　”――”は動的計画法による非流動性考慮解。”–*–*–”は平均分散モデルによる解（非流動性考慮なし）。

図 5.8.3.2　TOM を考慮したときの 2 資産モデルシミュレーション（TOM=6 期ケース）



(注)　”――”は動的計画法による非流動性考慮解。”–*–*–”は平均分散モデルによる解（非流動性考慮なし）。

5.9　本章のまとめ

本章では不動産の非流動性と複数期間運用を考慮したモデルを構築し,非流動性がポートフォリオ選択に与える影響について分析を行った。まとめると以下の通りである。

Cheng et al.の非流動性考慮型の一期間モデルを複数期間モデルへと発展させた。

また，一連の考察から，長期ポートフォリオ選択を講ずるための動学的最適化の方法として，非流動性を表現することのできる動的計画法の適用は,ひとまず有用なものであると結論付けてよい。これにより，不動産の非流動性がポートフォリオに与える影響のうち，重要となる「いつどれだけ取得をし,いつ売却をするのか」という質問に対して定量的な回答を示すことができる。

仮想データ（流動的資産と非流動的資産）を用いた結果，流動性を考慮しない場合，動学的最適化モデルと大きく異なる結果を導き出す。

取引費用は，ポートフォリオ内の不動産ウェイトに対して，次のような効果を与えることがわかった。投資家のリスク回避度に応じて，これら３つの効果の組み合わせによって，不動産への資産配分比を形作っていく。

① **取引費用の一定量保有効果**：取引費用が大きくなるに従い，不動産を投資開始時点に購入し終了時点まで一貫して持ち続ける一定量保有最適解を与える効果。
② **取引費用の取引量集塊効果**：取引費用の導入によって，不動産が一定の塊によって取引される傾向を与える効果。
③ **取引費用の保有量抑制効果**：不動産保有量を常に低下させる効果。購入と売却のタイミングが，非流動性を考慮しない平均分散モデル解と一致していても，資産配分比を常に減らす。

取引費用の影響が大きくなるにつれ「準流動性解」,「半流動性解」,「一定保有解」,「非保有解」の順に非流動性が高くなるような解を生じさせることがわかる。つまり，この順序が取引費用という非流動性要因が与える影響の度合いと考えて良い。取引費用が本研究で試験したような一定の水準にある場合，リスク回避度が高い投資家にとっては，不動産を一定量保有し続ける戦略は有効なものと考えて良い。短期的な不動産市場のサイクルに左右される投資を行うことは適切ではないだろう。

つぎに TOM は，不動産取引に対して以下のような効果を与えることがわかった。

① **市場滞留時間の取引先行効果**： 取引のタイミングに影響を及ぼす。とくに投資家にとって TOM の存在は先行投資を促進する要因であるといえる。この取引先行効果は，TOM が長くなるほどに効果を増していく。
② **市場滞留時間の取引費用的効果**：TOM が長くなりにつれて，リスク回避度の高い投資家にとっては保有量を減らす効果。つまり，取引費用のように，保有量を減らし，準流動性解もしくは一定保有解に近づいていることになる。

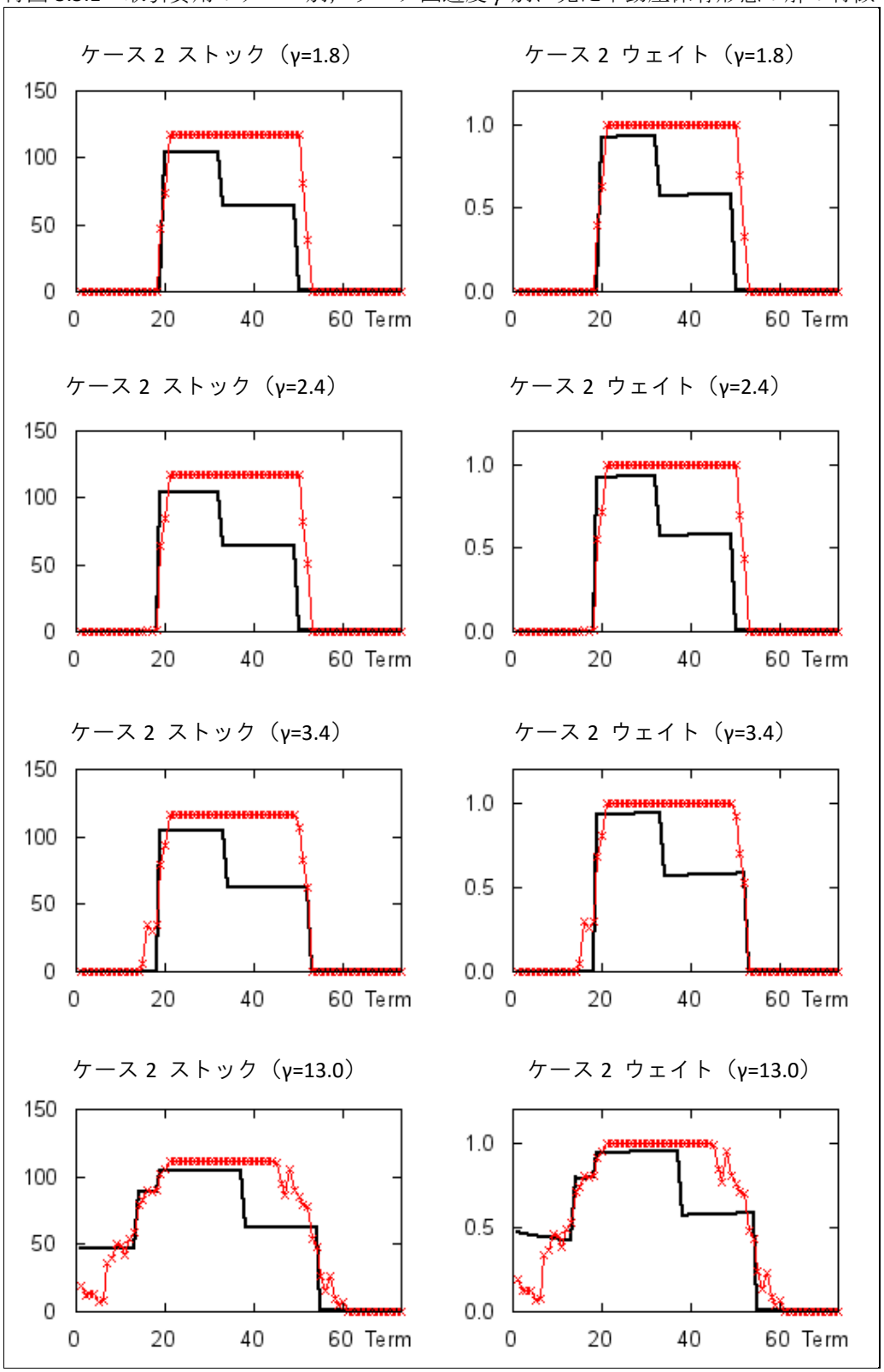
ただし，不動産を含む長期ポートフォリオ選択について一般的な戦略を語るには，もっと多くの将来想定の下でのシミュレーションを試行してみる必要がある。特に検証したい明確な目的を持った将来想定が必要である。

同モデルがリスク回避度の異なる投資家が,想定され得る取引費用及び市場滞留時間によって,様々な投資行動をとることが示すことができた。ダイナミックな投資行動をもって非流動性の影響を分析したい，というモデル構築の目的は達成することができたといって良いだろう。

また，本分析によって非流動性を考慮せずにポートフォリオ選択を行うと，不動産がもたらす効用を過大評価してしまうこともわかった。さらに上記で明確にしたような非流動性の効果から過剰な資産配分（最適なポートフォリオ構成）のみならず，運用のタイミングと期間についても

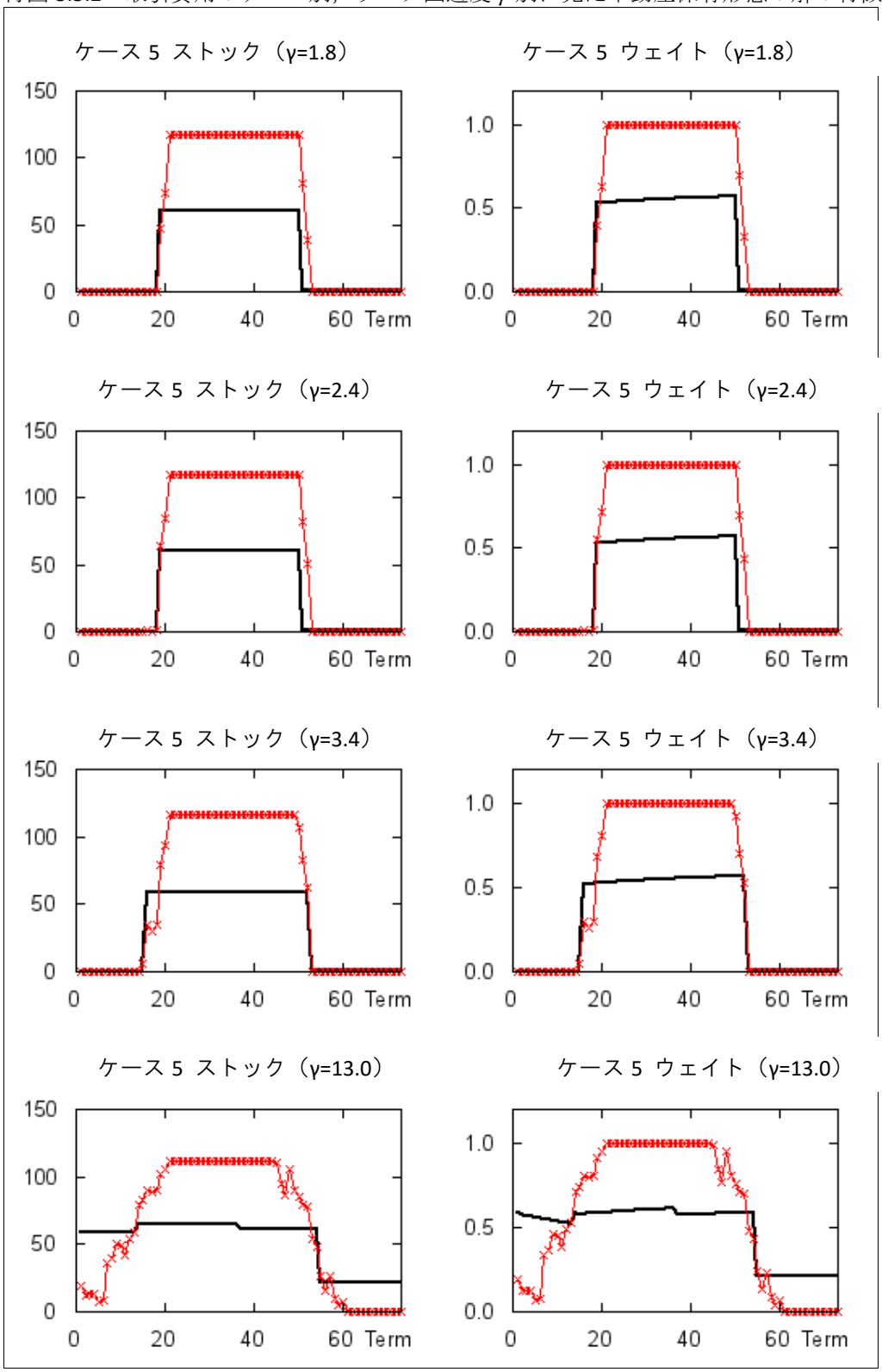
大きな影響を与えることがわかっている。つまり，非流動性を考慮せずにポートフォリオ構築を進めることは不適切であるといって良い。

付図 5.5.1　取引費用のケース別，リスク回避度 γ 別に見た不動産保有形態の解の特徴



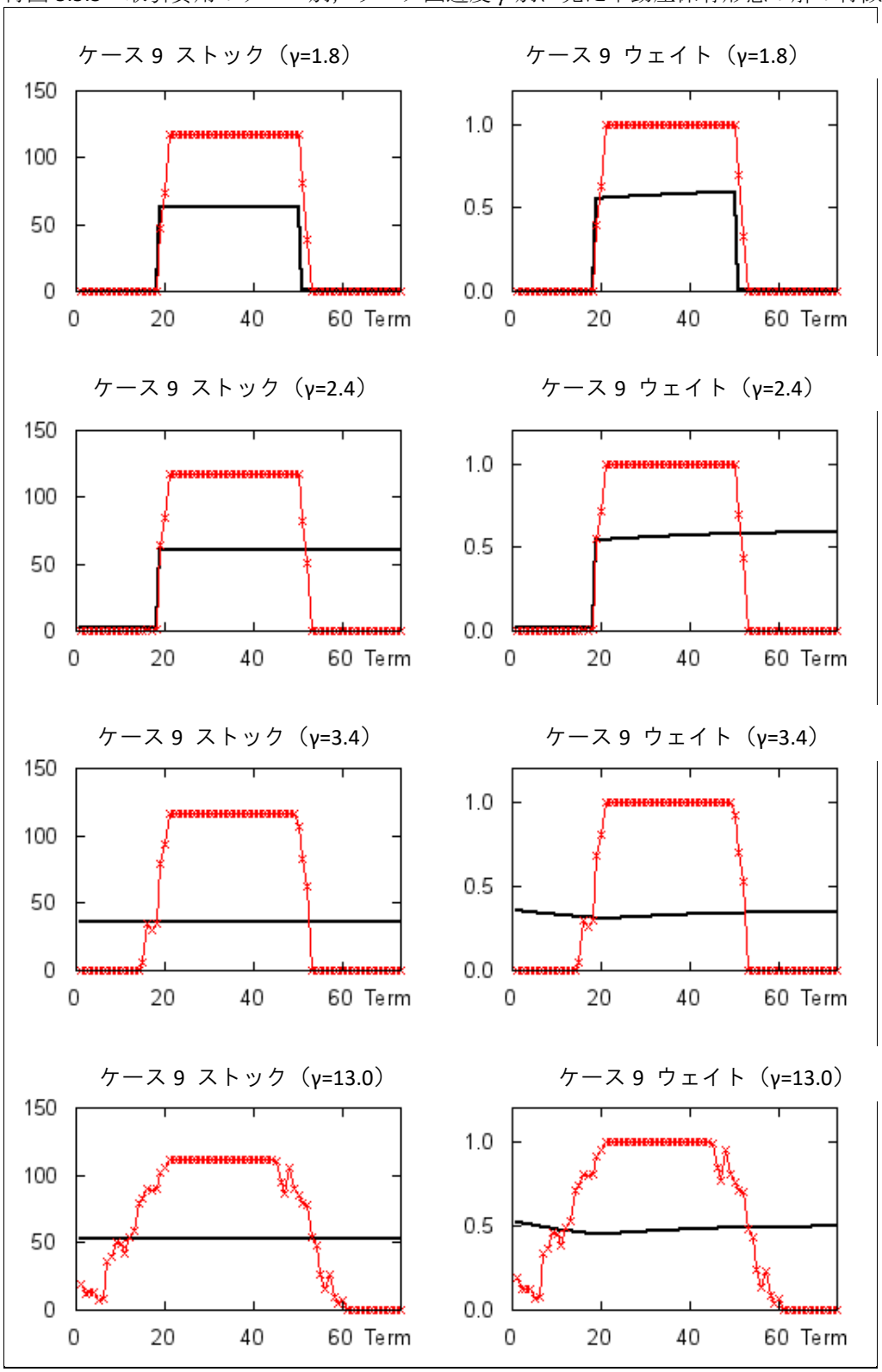
(注)　”――”は動的計画法による非流動性考慮解。”–*–*–”は平均分散モデルによる解（非流動性考慮なし）。

付図 5.5.2　取引費用のケース別，リスク回避度 γ 別に見た不動産保有形態の解の特徴



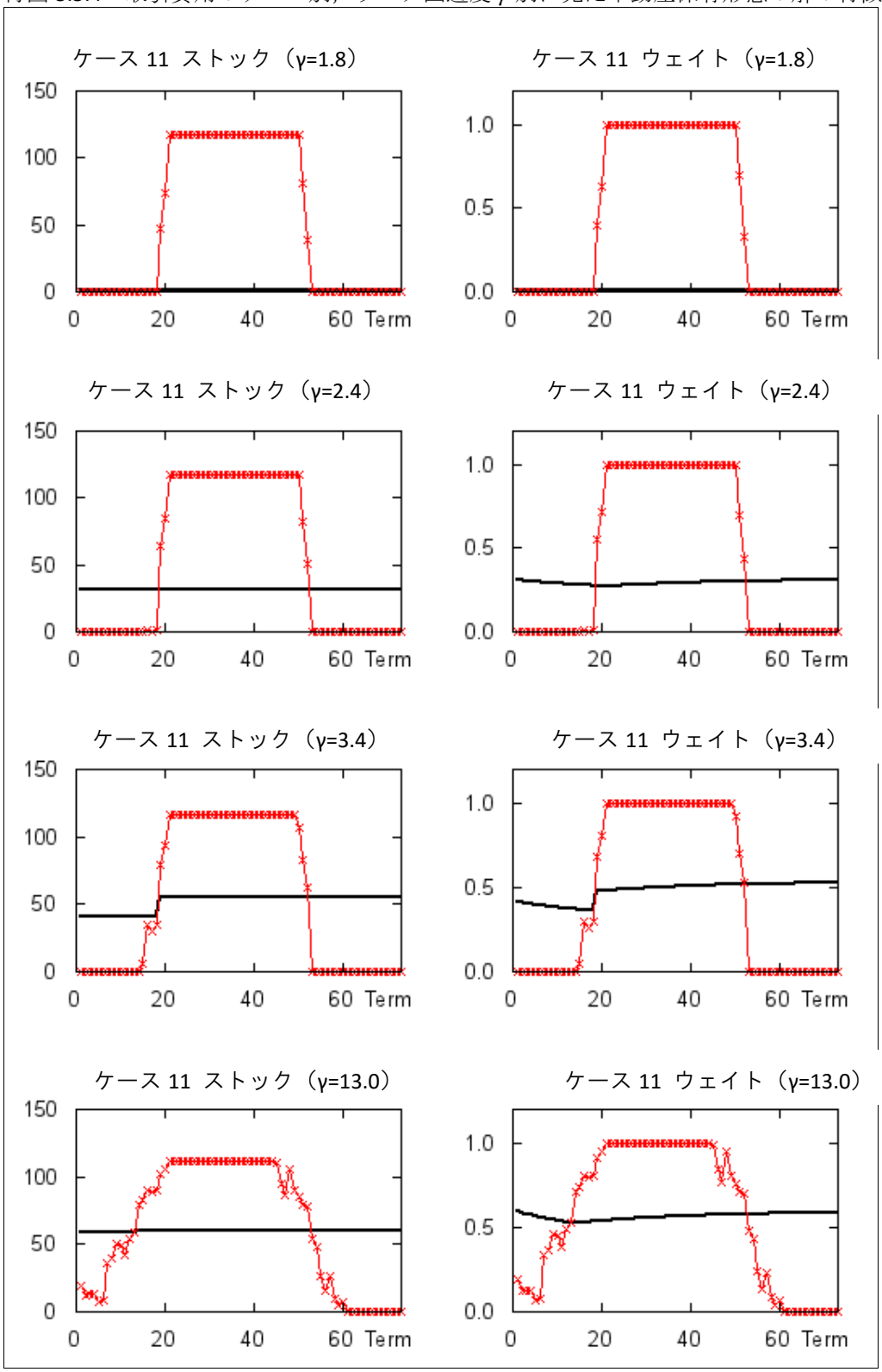
(注)　”――”は動的計画法による非流動性考慮解。”–*–*–”は平均分散モデルによる解（非流動性考慮なし）。

付図 5.5.3　取引費用のケース別，リスク回避度 γ 別に見た不動産保有形態の解の特徴



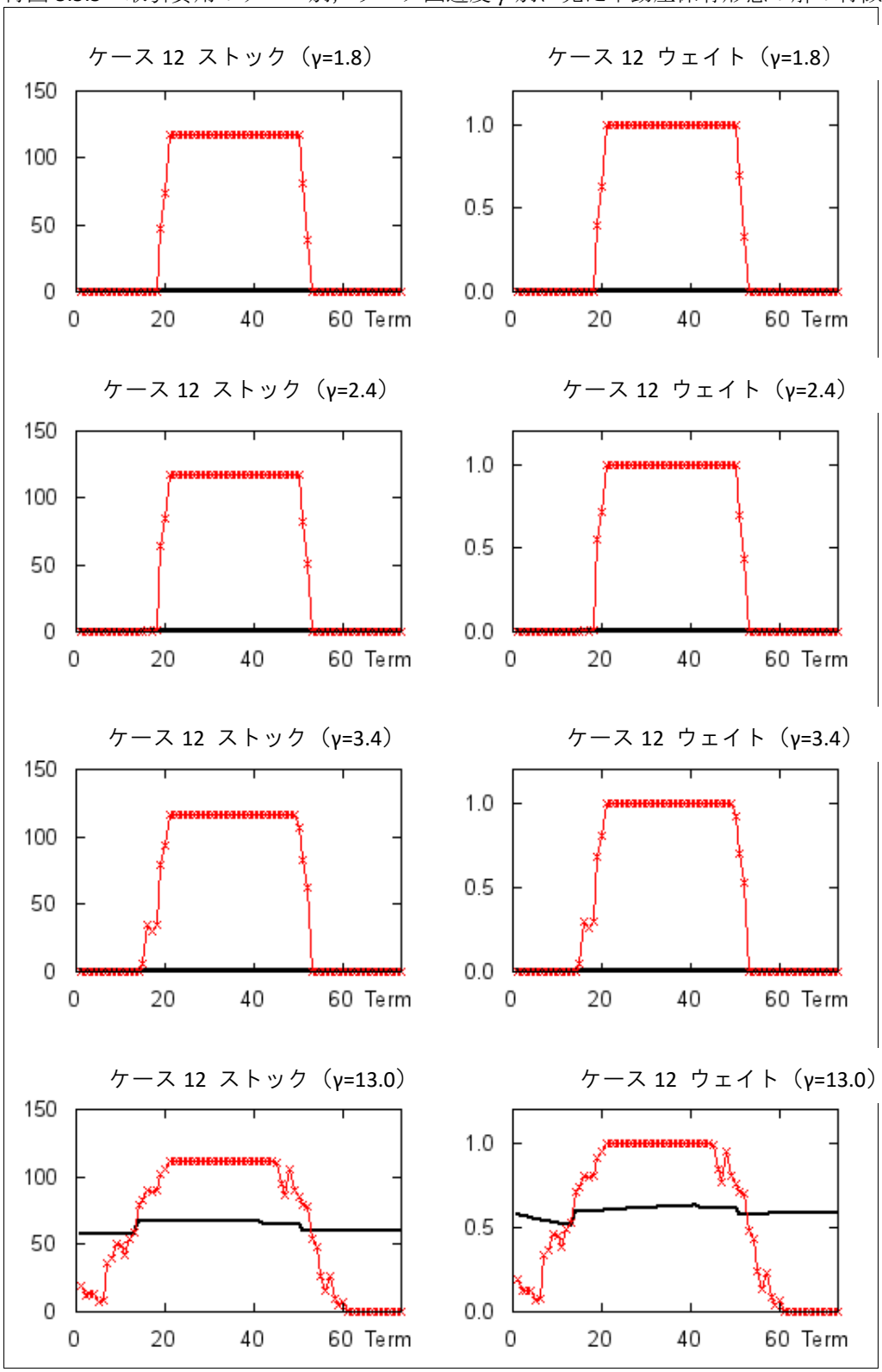
(注)　”――”は動的計画法による非流動性考慮解。”–*–*–”は平均分散モデルによる解（非流動性考慮なし）。

付図 5.5.4　取引費用のケース別，リスク回避度 γ 別に見た不動産保有形態の解の特徴



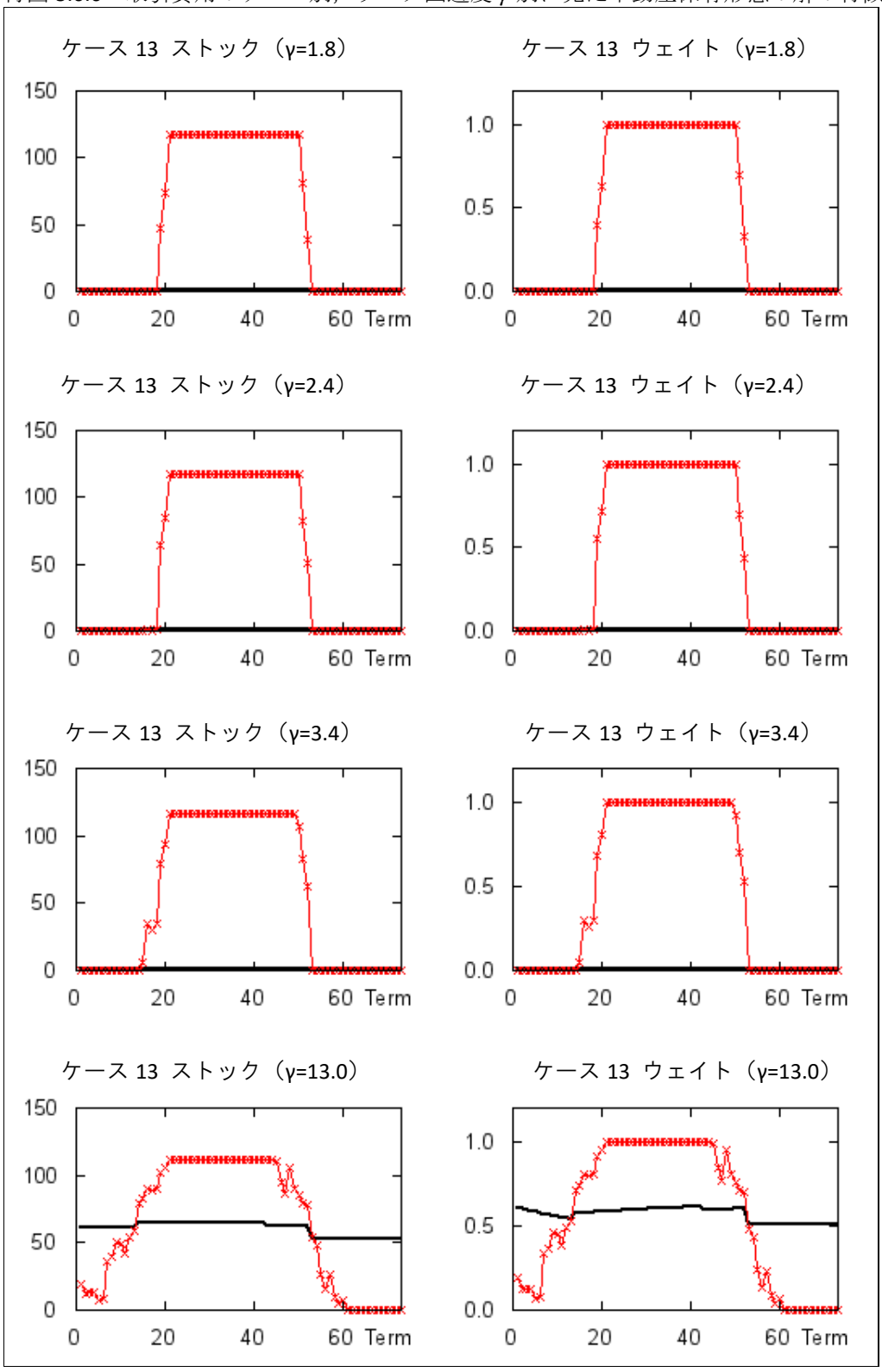
(注)　”――”は動的計画法による非流動性考慮解。”–*–*–”は平均分散モデルによる解（非流動性考慮なし）。

付図 5.5.5　取引費用のケース別，リスク回避度 γ 別に見た不動産保有形態の解の特徴



(注)　”――”は動的計画法による非流動性考慮解。”–*–*–”は平均分散モデルによる解（非流動性考慮なし）。

付図 5.6.6　取引費用のケース別，リスク回避度 γ 別に見た不動産保有形態の解の特徴



(注)　”――”は動的計画法による非流動性考慮解。”–*–*–”は平均分散モデルによる解（非流動性考慮なし）。

6　結論と今後の展望

不動産は投資資産として投資家によって長らく運用されてきた。そのために不動産を含むポートフォリオ選択研究は数多くなされており，あたかも議論し尽くされているかのように見える。しかし，不動産固有の性質すなわち「高い取引費用と売却時の市場滞留時間とがもたらす非流動性」を考慮したポートフォリオ研究となると限られているのが実情であり，つまり同領域については未だに発展途上にある。その理由として，不動産が株式や債券のような高い市場性を持たないこと，そして強い個別性による流動性計測の困難があげられる。そのようななか Cheng *et al.*(2013)はついに同特性をポートフォリオ分析へ組み入れることに成功した。彼らはモデル内にいくつかの非流動性要因を組み入れたものであり先駆的である。しかしそれでも議論すべき余地を残しており，特に複数期間モデルへの発展が課題となっていた。

そこで本研究は，国民の資産を運用する投資家の立場に立って，不動産を含むポートフォリオ選択の評価について特に次のような知見を得ることを目的としたものである。

① 不動産の非流動性とはそもそも何なのか。ポートフォリオにおける取扱いはどのように行われてきているのか。そして今後どのように扱うべきなのか。
② Cheng *et al.*(2013)は非流動性を考慮した上でモデル化を図っているが，同モデル内で不動産リターンの Non-i.i.d.特性に支配的な役割を与えている。そもそもこの特性とは何なのか，そして彼らの取扱い方が正しいのか。
③ 不動産を単一資産として扱うことには無理があるのではないか。不動産とその他の資産クラスとの時系列的な特性にどのような違いがあるか，一方異なる資産クラスとはいえ相互にどのような関連性があるかを明らかにし，ポートフォリオ選択への含意を得る。
④ 不動産を含むポートフォリオの構築では，非流動性の評価，複数期間にわたるポートフォリオの効用の評価，および多段階からなる投資の意思決定，といった側面を扱わねばならない。本研究ではどうすれば動学的最適化が有効に適用できるのか。

第 1 章　不動産の非流動性に関する先行研究と本研究の位置づけ

まず第 1 章では，不動産のもつ非流動性とポートフォリオ内でのその取り扱いについて先行研究サーベイを通じて論考した。そして，今後の不動産を含むポートフォリオ研究のあり方を整理することにより，本研究の位置づけを明確化した。特に不動産の非流動性とはなにかを論考し，ポートフォリオ選択での考慮の必要性を強調した。

不動産の非流動性は，無視してしまうと資産配分比を誇張させる要因であるため，ポートフォリオ分析に欠くことのできない要素である。非流動性は様々な要因で複合的に形成されている。長い取引プロセスは，売却までの価格変動と機会費用発生などの不確実性を増加させる。高い取引費用は保持期間を長くさせるにもかかわらず，今度は不動産の Non-i.i.d.過程が，長期間の保有を妨げる。言い換えるならば，不動産には最適保有期間が存在する。鑑定評価の誤差は，ポートフォリオ分析で用いる不動産指数に平滑化を引き起こし，適切な市場変動の捕捉を難しくさせる。このように複数要素で構成される不動産の非流動性を適切に把握することが難しい。しかし，無視して分析を行う場合，誤った資産配分結果を引き起こす可能性が高い。

Cheng *et al.*(2013)の非流動性対応型のポートフォリオ選択モデルの提案により，不動産を含む

ポートフォリオ研究の新たな方向性が示されたといえる。彼らは優れた理論構築を用いてこの特性をポートフォリオ分析に反映させている。一期間平均分散モデルの拡張型ではあるが，本研究の主要な先行研究として位置づけることにした。彼らの指摘する Non-i.i.d.特性，取引費用と市場停滞時間のモデル化は，本研究でも非流動性要因としてより詳しい分析とともに実施する必要があることを指摘した。

さらに投資家のリスク許容度は無視できない影響をもつ。先行研究においては軽視されてきており，より適切に同要素を反映したポートフォリオ分析が必要となる。投資家のリスク回避度の導入は，より実務に近い分析モデルへと発展させてくれると指摘した。

これらの指摘によって，本研究の焦点を「不動産の非流動性と複数期間運用を考慮したポートフォリオ選択における方法の研究」とし，幅広い投資家にとって洞察を与えられる多段階意思決定モデルへと発展させることを目的到達地点とした。

第２章　不動産リターンが持つ Non-i.i.d.過程の時系列的解明

つぎに長期複数期間ポートフォリオモデルの構築に先立ち，Cheng *et al.*(2013*)*の指摘した不動産リターンの Non-i.i.d.過程について分析した。Cheng *et al.*(2013)は非流動性の一つとして Non-i.i.d.特性を指摘しており，不動産の投資分散が長期保有と供に増幅され長期保有を妨げるとの主張をみせている。この主張をもとに彼らのモデル内でも支配的な役割を与えているようである。しかし，これは本当だろうか，というのが問いである。そもそも，この Non-i.i.d 特性とは何を表すものであろうか。より詳しい整理が必要であった。

Cheng *et al.*(2013)の指摘する Non-i.i.d.特性，いわゆる「リターンの分散が保有期間の 2 乗で増大する傾向」を試験した。その結果，彼らは記述的な分散をもって Non-i.i.d.特性をファクトファインディングとして Non-i.i.d.特性を定義したに過ぎないことを指摘した。さらに同特性の背後に単位根過程またはそれに似た分布であることを指摘した。日本においても同様に，単位根を確認することができた。

そこでさらに投資家のリスクについて検証を試みた。投資家は予測を行いながらポートフォリオ運用を行っており，予測誤差こそが彼らにとってのリスクである。そこで ARIMA によるモデル化を実施しこの誤差を見ることにした。その結果，決定係数が低く予測誤差が大きい結果となった。この予測誤差は保有期間の 3 乗で増大することを意味する。リターンの予測分散が保有期間の 2 乗で増幅することと同意義であり，Cheng *et al.* (2013)の指摘と同じである。

しかし，新たな問いも生まれた。これは不動産単体をもって分析をしたものであるが，複数資産クラスの枠組みで分析を行った場合はどうだろうか。つまり，ポートフォリオの一部として不動産を扱った場合，問題となっている誤差を減らせるのではないだろうか。投資家は複数の資産クラスを組み合わせることによってポートフォリオを構築しているし，各資産クラス間の相対的関係性によって不動産の投資妙味もかわってくる。これは現代ポートフォリオ理論（MPT）の枠組みとも一致する。そこで，次章にて多変量時系列分析を扱い，予測誤差の極小化を図ってみることとした。投資家は複数の資産クラスのリスク／リターン動向を把握・予測しながらポートフォリオ選択を行っている。ポートフォリオの枠組みで不動産を取り扱い分析することは自然であるといって良い。

第３章　ポートフォリオ選択における不動産と他の資産の多変量時系列分析

この疑問を解明するため，不動産を他の複数資産とともに多変量時系列分析を実施した。前述の通り，単変量分析では大きな予測誤差が見られた。しかし，これはあくまで単変量でみた結果である。これは多変量をもって，より時系列的に分析した場合，予測誤差を小さくすることは可能であろうか。また，不動産の収益指数の時系列的特性を理解するには複数資産の枠組みで分析する必要がある。そこで多変量時系列分析をもって不動産リターンと他の資産との相互関連性を解明していった。

多変量分析の結果，やはりモデル自体に不動産の単位根は残り続けるものの，不動産の予測誤差を他の資産クラスをもって説明できることがわかった。これにより，Cheng *et al.*(2013)が考えるほどに Non-i.i.d.特性がポートフォリオ選択に支配的な役割を担っているとは考えづらいことがわかった。言い換えるならば，不動産のみが暴走をする（単独で，他の資産クラスと全く違う動きをする）という彼らの定義は現段階で受け入れづらく，今後理論的かつ計量的な説明によって結論付けられるべきであると提起した。

このように，Cheng *et al.* (2013)の Non-i.i.d.特性がモデル構築時に意図的に導入した「最適保有期間」について，未だに懐疑的な部分が大きく，今後さらなる理論的計量的な試験が必要であること，つまり，新たな検討課題を見出す結果となった。後の第５章においてはこれを Non-i.i.d.特性をモデルに組み込まないことの理由の一つとして挙げている。

第４章　流動性擬制化でのリスク回避度別の長期ポートフォリオ選択

ここで，非流動性を考慮した多段階意思決定モデルの構築に先立てた前準備を行うこととした。ひとまず流動性を擬制化した状態でのポートフォリオ分析を行った。この第一の目的は，まず次章に向けたリスク回避係数モデルの導入である。前述の通り投資家のリスク回避度はポートフォリオ選択において支配的な役割を持つ。一般的に用いられる最適ポートフォリオや最小分散ポートフォリオでは特定の投資家もしくは特定の仮定（例えば無リスク資産が存在する）のうえで成り立つ分析モデルであるが，これでは表現できない事例も多く存在する。本章ではこのリスク回避係数をポートフォリオ分析モデルに取り込んだ。第二に，非流動性と複数期間モデルの必要性について確認することにある。流動性を犠牲化した状態で，つまり非流動性を考慮しない状態で，毎期すべての資産がリバランス可能であると仮定して平均・分散モデルを適用する。国外の先行研究では，こうした非流動性を考慮しない単純な平均･分散モデルの適用が不動産への過剰評価であると指摘している。そこで，日本においても同様の結果が見られるのかを試験した。

まず，リスク回避係数の導入は，異なる投資家を想定した上でのポートフォリオ分析は，有効なものと考えて良いと結論付けた。リスク回避度をパラメータとして分析を行った結果，同パラメータを意思決定の基礎とした合理的なアウトプットを得ることができたため，次章でのモデル構築に含めることとした。

そして不動産の分散効果は，その効果に差はあるものの，いかなるリスク回避係数を持つ投資家にとっても認められることを確認した。特に金融危機時にはその効果が共通して見られた。なかには鈴木・高辻(2013a)の指摘するように不動産の役割は時間的変化を持つことが確認された。つまり不動産の役割は，一定に推移することはなく，絶えず評価され続ける必要があ

る。同時に，ポートフォリオ全体において選好される時期とされない時期があるため，その時期の見極めが特に重要となる。

分析を通じて不動産の資産配分比（または組み入れ）は，リスク回避係数が高くなるほどに増えていくことがわかった。また，同時にポートフォリオのリスク調整後リターンを改善させることも見て取れた。不動産の分散投資効果が最も発揮されるのは金融危機時のように市況が下を向いているときである。これらのことから，不動産は金融危機時にリスク分散役として有益な資産クラスであったといえよう。完全リスク回避型投資家のポートフォリオでは，不動産が常に RAR を改善させることから継続して組み込まれていた。つまり，同投資家にとって不動産は常に選好される資産クラスである。リスク回避係数が高くなっていくに従い，不動産へのアロケーションが進んでいくが，リスク耐性がある投資家にとっても，金融危機時において不動産を組み入れていることが見られる。つまり不動産は，金融危機時においても魅力的なリスク調整後リターンを，リスク回避係数で想定したいかなる投資家にとっても提供をしていたこととなる。

しかし，ここでは不動産の非流動性を考慮していないのでいわゆる過剰評価であることが見て取れる。不動産は非流動性資産として理解をされており，同特性はポートフォリオ選択に影響（特に課題な資産配分比）を及ぼすと理解されている。事実，本結果内でも不動産へのアロケーションは極端に大きく，本結果のみをもって不動産を理解したと考えるのは危険である。そこで次章においてこの非流動性について見ていくこととした。

第５章　不動産の非流動性を考慮した長期多段階ポートフォリオの選択の方法

本章ではついに長期多段階ポートフォリオモデルを構築して，理論的かつ実証的に，非流動性がポートフォリオ選択に与える影響について分析を行った。これによりポートフォリオ選択における「いつ不動産を取得し手放すべきか」という重要な質問に答えることを目指し「不動産の非流動性を考慮した長期多段階ポートフォリオ選択方法の構築」を到達地点とした。

不動産の非流動性がポートフォリオ選択に与える影響をみるために，これまでに得られた知見を基礎として，ポートフォリオモデルの構築を図った。具体的には，非流動性を考慮した長期複数資産ポートフォリオの構築のための動学的最適化モデルを「複数期間・多段階意思決定モデル」として定式化しその有用性を確かめた。理論的知見と実証的知見を得たうえで，非流動性と複数期間運用を想定した場合としなかった場合で，いかなる差異が見えてくるのかを探求した。

Cheng *et al.*(2013)の非流動性考慮型の一期間モデルを複数期間モデルへと発展させた。その一連の考察から，長期ポートフォリオ選択を講ずるための動学的最適化の方法として，非流動性を表現することのできる動的計画法の適用は，ひとまず有用なものであると結論付けた。これにより，不動産の非流動性がポートフォリオに与える影響のうち，重要となる「いつどれだけ取得をし，いつ売却をするのか」という質問に対して定量的な回答を示すことができた。また，今後のモデルの発展についても期待できる。例えば，投資家の bid/offer 戦略のモデル化である。TOM の存在に対し投資家が単に受け身で行動するのでなく，価格戦略で対応することにより TOM を短縮するような行動が考えられるが，そのような投資行動もモデル化は多種多様な投資シナリオを分析する際には有用なものとなってくる。

仮想データ（流動的資産と非流動的資産）を用いた結果，流動性を考慮しない場合，動学的最

適化モデルと大きく異なる結果を導き出すことがわかった。まず「取引費用」は，ポートフォリオ内の不動産ウェイトに対して，次のような効果を与えることがわかった。投資家のリスク回避度に応じて，これら３つの効果の組み合わせによって，不動産への資産配分比を形作っていくこともわかった。

① **取引費用の一定量保有効果**：取引費用が大きくなるに従い，不動産を投資開始時点に購入し終了時点まで一貫して持ち続ける一定量保有最適解を与える効果。
② **取引費用の取引量集塊効果**：取引費用の導入によって，不動産が一定の塊によって取引される傾向を与える効果。
③ **取引費用の保有量抑制効果**：不動産保有量を常に低下させる効果。購入と売却のタイミングが，非流動性を考慮しない平均分散モデル解と一致していても，資産配分比を常に減らす。

取引費用の影響が大きくなるにつれ「準流動性解」,「半流動性解」,「一定保有解」,「非保有解」の順に非流動性が高くなるような解を生じさせることがわかる。つまり，この順序が取引費用という非流動性要因が与える影響の度合いと考えて良い。取引費用が（本研究で試験したよな）一定の水準にある場合，リスク回避度が高い投資家にとっては，不動産を一定量保有し続ける戦略は有効なものと考えて良い。短期的な不動産市場のサイクルに左右される投資を行うことは適切ではないだろう。

つぎに市場滞留時間（TOM）は，不動産取引に対して以下のような効果を与えることがわかった。

① **市場滞留時間の取引先行効果**： 取引のタイミングに影響を及ぼす。とくに投資家にとって TOM の存在は先行投資を促進する要因であるといえる。この取引先行効果は，TOM が長くなるほどに効果を増していく。
② **市場滞留時間の取引費用的効果**：TOM が長くなりにつれて，リスク回避度の高い投資家にとっては保有量を減らす効果。つまり，取引費用のように，保有量を減らし，準流動性解もしくは一定保有解に近づいていることになる。

ただし，不動産を含む長期ポートフォリオ選択について一般的な戦略を語るには，もっと多くの将来想定の下でのシミュレーションを試行してみる必要がある。特に検証したい明確な目的を持った将来想定が必要であることも忘れるべきではないとした。

本研究の貢献と今後の展望

本研究の貢献は，不動産の非流動性を考慮した長期多段階ポートフォリオ選択を可能としたことにある。つまり，手法の構築である。その他の貢献も，モデル精緻化の過程で得られたものをいくつか挙げることができる。まず①Cheng *et al*.(2013)の non-i.i.d.過程について新たな課題点を提起した，不動産の非流動性とそのポートフォリオ選択の在り方を論考した。次に②日本の不動産データを用いて不動産を含むポートフォリオ選択を整理した，そして③日本で初めてリートの不動産への先行性を確認したなど，学術的にその有用性が認められる知見である。しかし，それらよりも，非流動性を考慮したポートフォリオ選択モデルを長期多段階モデルへ拡

張したことこそ，先行研究が豊富な他国に先立って達成することのできた一番の貢献であると言ってよい。

なぜ，本研究でのモデル構築がそれほどまでに重要であるのか。実務における不動産投資は常に非流動性の議論が付きまとう。リスクとリターンのみをもって分析する単なる平均分散ポートフォリオでは対応できず，実際の運用での肌感覚に合うアウトプットを与えてくれないことは，周知の事実である。そのために「いかにこの非流動性を考慮した上で，ポートフォリオ選択を行っていくのか」という問いは，実務者にも学術者にも常に頭を悩ませる難問となっている。実務者の間では，平均分散モデルで算出した定量結果に，定性的な解釈の上で大きく手を加える場合も少なくはない一方で，学術者もその解決策をうまく提示できないでいる。本研究では，この問いへの解決方法の一つを提案した。非流動性においてとても重要な質問である「不動産をいつどれだけ取得し売却すれば良いのか」に対して，定量的回答の提示を可能としたことになる。

さらに，不動産の非流動性要因である取引費用と市場滞留時間が，ポートフォリオ選択に与える影響についても，同モデルを用いて発見することができた。同モデルのような多段階意思決定モデルでなければ見出すことのできなかった知見である。これら特性を無視したポートフォリオ選択は誤った分析結果，しいてはポートフォリオ運用を誘引してしまうことから常に考慮されるべきものである。本研究はこの非流動性が持つリスクを顕在化させることによって投資家によりポートフォリオ構築につき良い洞察を与えた。

もちろん，本文中で指摘したように同モデルと分析結果には課題点はある。本研究はあくまでも不動産の非流動性をポートフォリオ選択上で取り扱う方法に焦点を当てていたがため，実際のデータを用いて，不動産がポートフォリオ上で担う役割やあり方を軸においたものではない。事実，本研究内では実際の投資指標データを用いて分析を行ったが，仮想パラメータを採用した箇所も少なくはない。非流動性がポートフォリオに与える影響に関する傾向をつかむことには成功したが，まだまだパラメータを精緻化してできる分析がたくさんある。つまり，実際のデータをよく吟味したうえで，同モデル上で分析を行うことによって，多くの事象について分析が可能であると期待できる。さらに本研究では鑑定評価ベース不動産指数の非平滑化までは行わなかったので，非流動性を考慮してもなお，不動産へ過剰配分がなされている可能性が大きい。今後は平滑化手法について精査改善させたうえでデータを信頼性の高いものへと進化させる必要がある。

今後は実在する特定の投資家への政策的提言を目的とした分析も可能である。序論で述べたとおり，日本における不動産投資はまだ発展途上にあり，これからも不動産を含むポートフォリオ構築への助言を求める機関投資家も増えてくるものと予想される。機関投資家の裏にいるのは，世帯であり国民（例えば，年金基金であれば年金受給者）であるからして，経済的な安定と成長に貢献できるその助言はとても重要である。これら今後の展望を期待したい。

参考文献

Ayedun C.A., Ogunba O.A. and Oloyede S.A. (2011). Empirical Verification of the Accuracy of Valuation estimates Emanating from Nigerian Valuers: A Case Study of Lagos Metropolis. International Journal of Marketing Studies. Vol.3, No.4; November 2011

Bond, S.A. & Hwang, S. (2004). Liquidity risk and real estate: a quantitative approach to assessing risk, paper presented at Liquidity in Commercial Markets, Investment Property Forum, London

Bollerslev, T. (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. Journal of Econometrics. 31. 307-327

Brown, G. R., & Matysiak, G. A. (2000). Sticky Valuations, Aggregation Effects, and Property Indices. Journal of Real Estate Finance and Economics , 20 (1), 49-66.

Callender, M., Deveney, S., Sheahan, A., Key, T. (2007). Risk Reduction and Diversification in UKCommercial Property Portfolios. Journal of Property Research, 24(4), pp.355-375.

Campbell, J. Y. & Viceira, L.M. (2002)，戦略的アセットアロケーション―長期投資のための資産配分の考え方．邦訳 木島正明・野村證券金融経済研究所（2005），東洋経済新報社

Carsberg, B. (2002). Property Valuations. Report of the RICS Committee. London. Royal Institution of Chartered Surveyors.

Cheng, P., Lin, Z. & Liu, Y (2007). Pricing Illiquid Real Estate Assets When Returns Are Not II D. working Paper. Florida Atlantic University.

Cheng, P., Lin, Z. & Liu, Y (2008), A Model of Time-on-Market and Real Estate Price Under Sequential Search with Recall, Journal of Real Estate Economics, v36 4, 813-843

Cheng, P., Lin, Z. & Liu, Y (2013), Is There a Real Estate Allocation Puzzle?. The Journal of Portfolio Management. Vol. 39, No. 5, pp.61-74

Cheng, P., Z. Lin, and Y. Liu (2010a), Illiquidity and Portfolio Risk of Thinly-traded Assets, The Journal of Portfolio Management, 36, pp. 126-138

Cheng, P., Z. Lin, and Y. Liu (2010b), Illiquidity, Transaction Cost, and Optimal Holding Period for Real Estate: Theory and Application, http://ssrn.com/abstract=1580134

Cheng, P., Z. Lin, and Y. Liu (2012), Optimal Portfolio Selection: the Role of Illiquidity and Investment Horizon, working paper, http://ssrn.com/

Cheung, Y. and Lai, K. (1993), Finite sample sizes of Johansen's likelihood ratio tests for cointegration, Oxford Bulletin of Economics and Statistics, 55: 313-328

Chiang, Y., So, C., & Tang, B. (2008), Time- varying performance of four Asia-Pacific REIT, Journal of Property Investment & Finance, 26 (3): 210-231.

Clascock, J. L., Lu, C., & So, R. W. (2000), Further Evidence on the Integration of REIT, Bond, and Stock Returns. Journal of Real Estate Finance and Economics, 20:2: 177- 194.

Clayton, J., & MacKinnon, G. (2001), The Time-Varying Nature of the Link between REIT, Real Estate and Financial Asset Returns, Jornal of Real Estate Potfolio Management, Vol. 7 (No. 1): 43-54.

Clayton, J., Geltner, D., & Hamilton, S. W. (2001). Smoothing Commercial Property Valuation: Evidence from Individual Appraisals. Real Estate Economics , V29 (3), 337-360.

Elliott, Graham & Rothenberg, Thomas J & Stock, James H. (1996), Efficient Tests for an Autoregressive Unit Root, Econometrica, Econometric Society, vol. 64(4): 813-36, July.

Fama, E.(1970), Multi-period Consumption–Investment Decisions., American Economic Review,　pp.

163-74.

Geltner, D., Graff, R. & Young, M. (1994). Random Disaggregate Appraisal Error in Commercial Property: Evidence from the Russel-NCREIF Database. The Journal of Real Estate Research. Vol. 9 (No. 4), 403-419

Giliberto, S. M. (1990), Equity Real Estate Investment Trusts and Real Estate Returns, The Journal of Real Estate Research: 259-263.

Granger, C.W.J. (1969), investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods, Econometrica, 37: 424-438.

Hordijk, A. & Teuben, B. (2008). The liquidity of direct real estate in istitutional investors' portfolios: The Netherlands. Journal of Portfolio Investment & Finance. Vol. 26 No. 1. pp. 38-58

Howard, R.A.(1960)，Dynamic programming and markov processes , MIT press
（邦訳：関根智明・羽鳥裕久・森俊夫（1971)，ダイナミックプログラミングと
マルコフ過程，培風館，p.32）

Ibbotson, R., & Siegel, L. (1984). Real Estate Returns: A Comparison with Other Investments. AREUEA Journal , Vol. 12 (No. 3), 219-242.

IPD (2014), IPD Real Estate Index Analyses: Global Market Size Estimates Report, PDF: http://www.ipd.com/about/ipd_guides_and_standards/IPD%20Global%20Market%20Size%20Estimates%20Report.pdf

Key, T. & Marcato, G. (2007), Smoothing and Implication for Asset allocation Choices, Journal of Portfolio Management, Vol. 33 No. 5, pp. 85-99.

Kwiatkowski, D., P.C.B. Phillips, P. Schmidt, Y. Shin (1992), Testing the Null Hypothesis of Stationarity against the Alternative of a Unit Root, Journal of Econometrics, 54: 159-178, North-Holland.

Lee, S. & Stevenson, S. (2006), Real Estate in the Mixed-Asset Portfolio: The Question of Consistency, Journal of Property Investment & Finance, 2006, 24:2: 123-135.

Lee, S. (2003), When Does Direct Real Estate Improve Portfolio Performance?, Working Papers in Real Estate & Planning, 17/03, University of Reading

Lee, S. (2005a) How often does direct real estate increase the risk-adjusted performance of the US mixed-asset portfolio? Working Papers in Real Estate & Planning. 10/05. Working Paper. University of Reading, Reading. pp14.

Lee, S. (2005b). The marginal benefit of diversification in commercial real estate portfolios. Working Papers in Real Estate & Planning. 04/05. Working Paper. University of Reading, Reading, pp.11.

Lieser, K. & Groh, A. P. (2013). The Determinants of International Commercial Real Estate Investment. Journal of Real Estate Finance and Economics. Vol.48, Issue 4, pp-611-659

Lin, Z., & Y. Liu (2008), Real Estate Returns and Risk with Heterogeneous Investors, Real Estate Economics, 36, 753-776.

Markowitz, H.M. (1952), Portfolio Selection, The Journal of Finance, 7 (1): 77–91

Maroney, N. & Naka, A. (2006), Diversification Benefits of Japanese Real Estate Over the Last Four Decades, Journal of Real Estate Finance and Economics, Vol. 33, No.3

McAllister P., Baum A., Crosby N., Gallimore P., and Gray A (2003). Appraiser behaviour and appraisal smoothing: some qualitative and quantitative evidence. Journal of Property Research, 20(3) 261-280

McNamara, P. (1998). Exploring Liquidity: Recent Survey Findings. Paper to 7th IPD Conference, Brighton, November

Merton, R. (1969). Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous Time Case, Review of Economics and Statistics 51, 247-57

Merton, R. (1971). Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous Time Model, Journal of Economic Theory 3, 373-413

Ng, Serena and Pierre Perron (2001), Lag Length Selection and the Construction of Unit Root Tests with Good Size and Power, Econometrica, 69: 1519-1554.

Oikarinen, E., Hoesli, M., Serrano, M. (2012), Do Public Real Estate Returns Really Lead Private Returns?, Swiss Finance Institute Research Paper, No. 10-47

Parker D. (1998). Valuation Accuracy – An Australian Perspective. Presented at 4th Pacific Rim Real Estate Socirty Conference Perth, 19-21 January 1998

Phillips, P.C.B and P. Perron (1988), Testing for a Unit Root in Time Series Regression, Biometrika, 75: 335–346

Pramerica(2012). A Bird's Eye View of Global Real Estate Markets: 2012 Update.

Ross, S. M.(1983), Introduction to Stochastic Dynamic Programming, Academic Press.

Said E. and David A. Dickey (1984), Testing for Unit Roots in Autoregressive Moving Average Models of Unknown Order, Biometrika, 71: 599–607.

Samuelson (1969). Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming, Review of Economics and Statistics 51, 239-246

Sharpe, W. (1964), Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium, Journal of Finance, XIX, 425-442

Shimizu, C., & Nishimura, G. (2006) Biases in appraisal land price information: the case of Japan. Journal of Property Investment & Finance Vol. 24 No. 2, 2006 ,150-175.

池田昌幸(2010). 金融経済学の基礎. 朝倉書店

大村恵一(2010). ファイナンス論. 有意閣

小野善康(2009). 金融第 2 版. 岩波書店

齋藤誠(2007). 資産価格とマクロ経済. 日本経済新聞出版社

清水千弘(2012), 資産価格と割引率のマイクロストラクチャの測定―資産価格の理論的基礎と計量経済学的接近―, 麗澤経済研究, 第 21 巻第 1 号

鈴木英晃・高辻秀興 (2013a), 最小分散ポートフォリオでの不動産投資の分散効果ダイナミクス, 不動産学会学術講演会論文集: 第 29: 13-20

鈴木英晃・高辻秀興(2013b), 不動産投資指数の時系列的変動における特徴, 日本不動産学会

鈴木英晃・高辻秀興(2015), ポートフォリオ選択におけるリスク回避度別にみた不動産投資の選好, 麗澤経済研究, 23 巻

内閣官房(2013), 公的・準公的資金の運用・リスク管理等の高度化等に関する有識者会議, PDF. http://www.cas.go.jp/jp/seisaku/koutekisikin_unyourisk/houkoku/h251120.pdf

鍋島一郎（1968）, 動的計画法数学ライブラリー7, 森北出版, pp.73-75

前川俊一(1999). 不動産投資分析論. 清文社

蓑谷千鳳彦(2007), 計量経済学大全, 東洋経済新報社: 709-710

謝辞

本論文は麗澤大学大学院経済研究科に提出した学位請求論文である。多忙な日程のなか審査をご担当下さった高辻秀興教授（主査）*，前川俊一教授†，小野宏哉教授‡，徳永澄憲教授§，籠義樹教授**の先生方に心から謝意を表したい。頂いた助言はどれも有益であり，それらなしでは本論文を現在の水準に到達させることはできなかった。それでも，もし全ての助言に対し適切に答えられておらず誤りがあるとすれば，それは全て筆者の力不足によるところである。

また，本論文は麗澤大学総合研究センターから研究費の支援を受けた研究プロジェクトを基礎としている。同センターでは客員研究員として充実した研究環境のなか，のびのびと研究をさせていただいた。ここに感謝の意を表したい。

指導教官でもある高辻秀興教授への謝意はここで表現し足りることがない。同氏の根気強いご指導は，それは筆者が博士課程の生徒となる二年も前から始まっていた。正規の生徒としての身分も持たない筆者を，労力を惜しむことなくご指導下さり，筆者が近視眼的な事柄に流されるなか，同氏は常に長期的な目線から見守って下さった。同氏のご指導なく本論文をまとめ上げることは出来なかったことを，心からの感謝とともにここに書き記したい。

最後に，本学位取得の陰には，絶えず支えてくれた妻の存在があった。祝杯とともに労いたい。

* 麗澤大学経済学部
† 明海大学不動産学部
‡ 麗澤大学経済学部
§ 麗澤大学経済学部
** 麗澤大学経済学部